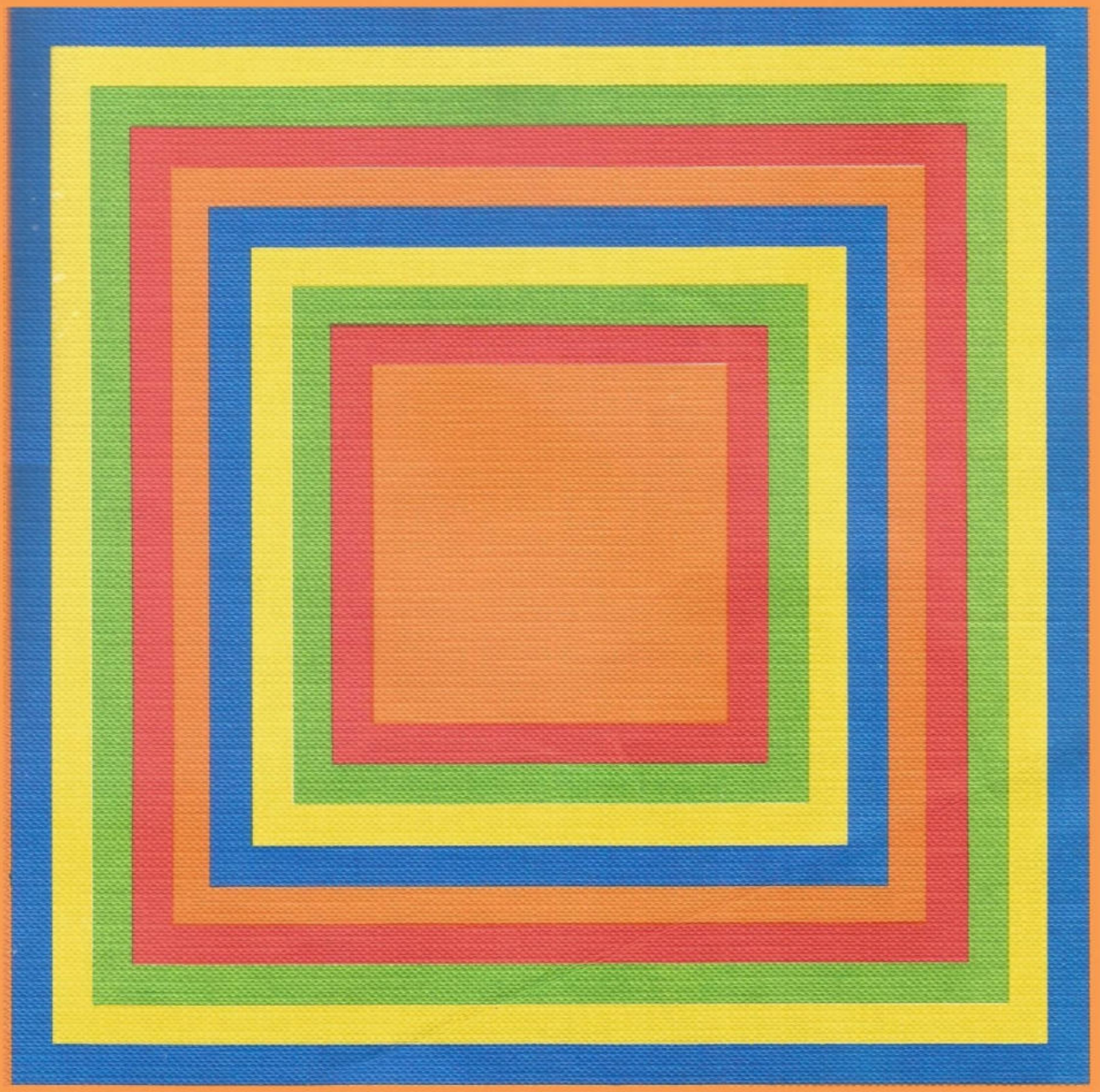
MATEMÁTICAS 8

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA



santillana

Índice

TEMA 1

Repaso del número entero 4

1. Números enteros: positivos y negativos.
2. Suma y resta de números enteros.
3. Multiplicación y división de números enteros.
4. Simplificación de la escritura de enteros.
5. Potencias. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Actividades.

TEMA 2

Fracciones 16

1. Fracciones de términos enteros positivos. I.
2. Fracciones de términos enteros positivos. II.
3. Fracciones de términos enteros.
4. Fracciones equivalentes.
5. Amplificación y simplificación de fracciones.
6. Reducción de fracciones a común denominador.

Actividades.

TEMA 3

Números racionales 26

1. Número racional. I.
2. Número racional. II.
3. Representación gráfica de números racionales. I.
4. Representación gráfica de números racionales. II.

Actividades.

TEMA 4

Adición y sustracción de números racionales 32

1. Ordenación de números racionales.
2. Suma de números racionales.
3. Propiedades de la suma de números racionales. I.
4. Propiedades de la suma de números racionales. II.
5. Resta de números racionales. Equivalencias fundamentales.
6. Sumas y restas combinadas. Supresión de paréntesis.

Actividades.

TEMA 5

Multiplicación y división de números racionales 40

1. Producto de números racionales.
2. Propiedades del producto de números racionales.
3. Propiedad distributiva. Sacar factor común.
4. División de números racionales.
5. Propiedades de la división de números racionales.
6. El cuerpo de los números racionales.
7. Fracciones de términos racionales. Simplificación.

Actividades.

TEMA 6

Potencias 50

1. Potencia de base racional y exponente natural.
2. Producto y cociente de potencias de la misma base.
3. Potencia de una potencia. Potencia de un producto.
4. Potencia de exponente entero.
5. Operaciones con potencias de exponente entero.

Actividades.

TEMA 7

Decimales. I 56

1. Clasificación de los números decimales.
2. Expresión decimal de un número racional: casos.
3. Fracción generatriz de un número decimal. I.
4. Fracción generatriz de un número decimal. II.
5. Escritura de decimales mediante potencias de 10.

Actividades.

TEMA 8

Decimales. II 62

1. Ordenación densa de los números racionales.
2. Breve idea del número irracional y del número real.
3. Operaciones con decimales. I.
4. Operaciones con decimales. II.

Actividades.

TEMA 9

Operaciones con radicales cuadráticos 68

1. Radicales cuadráticos. I.
2. Radicales cuadráticos. II.
3. Suma y resta de radicales cuadráticos semejantes.
4. Producto de radicales cuadráticos.
5. División de radicales cuadráticos.
6. Potencia de una raíz.
7. Racionalización de denominadores.

Actividades.

TEMA 10

Ecuaciones de primer grado 76

1. Lenguaje algebraico.
2. Expresiones algebraicas. Valor numérico.
3. Igualdades. Identidades y ecuaciones.
4. Grado, soluciones y términos de una ecuación.
5. Ecuaciones equivalentes. I.
6. Ecuaciones equivalentes. II.
7. Ejemplos de resolución de ecuaciones de coeficientes racionales.

Actividades.

TEMA 11

Problemas de primer grado 84

1. Método algebraico para la resolución de problemas. I.
2. Método algebraico para la resolución de problemas. II.
3. Problemas sobre mezclas y aleaciones. I.
4. Problemas sobre mezclas y aleaciones. II.
5. Problemas sobre relojes.
6. Otros problemas.

Actividades.

TEMA 12

Funciones 92

1. Idea de función.
2. Dominio, recorrido y ecuación de una función.
3. Funciones de variable racional. Cálculo de la antiimagen.
4. Ejes de coordenadas. Cuadrantes.
5. La función lineal: de variable entera y de variable racional.

Actividades.

TEMA 13

Operaciones con funciones 100

1. Las funciones más simples.
2. Suma de funciones.
3. Funciones opuestas.
4. Diferencia de funciones.
5. Multiplicación de funciones.
6. Cociente de funciones.

Actividades.

TEMA 14

Funciones polinómicas de primer grado. Gráficos 108

1. Gráficos de la función constante y de la función lineal.
2. Gráfico de la función afín.
3. Gráfico de una ecuación lineal con dos incógnitas.

Actividades.

TEMA 15

Sistemas de ecuaciones 114

1. Sistemas de ecuaciones lineales. I.
2. Sistemas de ecuaciones lineales. II.
3. Métodos para la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones. I.
4. Métodos para la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones. II.
5. Métodos para la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones. III.

Actividades.

TEMA 16

Resolución de problemas mediante sistemas 120

1. Problemas sobre números.
2. Problemas sobre edades.
3. Problemas de mezclas.
4. Problemas de porcentajes.
5. Problemas sobre grifos o fuentes.
6. Otros problemas.

Actividades.

TEMA 17

Monomios. Operaciones con monomios 128

1. Funciones monomio. Monomios. I
2. Funciones monomio. Monomios. II.
3. Suma de monomios.
4. Resta de monomios.
5. Producto de monomios.
6. División de monomios.
7. Potencia de un monomio.

Actividades.

TEMA 18

Suma y resta de polinomios 136

1. Funciones polinómicas y polinomios. I.
2. Funciones polinómicas y polinomios. II.
3. Polinomios. I.
4. Polinomios. II.
5. Suma de polinomios.
6. Propiedades de la suma de polinomios.
7. Resta de polinomios.

Actividades.

TEMA 19

Multiplicación de polinomios 144

1. Producto de polinomios. I.
2. Producto de polinomios. II.
3. Propiedades del producto de polinomios. I.
4. Propiedades del producto de polinomios. II.
5. Igualdades notables. I.
6. Igualdades notables. II.
7. El producto de polinomios en forma abreviada.

Actividades.

TEMA 20

División de polinomios. Regla de Ruffini 152

1. División de polinomios. I.
2. División de polinomios. II.
3. División de un polinomio por el binomio $x - a$. I.
4. División de un polinomio por el binomio $x - a$. II.
5. Descomposición factorial.

Actividades.

TEMA 21

Ecuaciones de segundo grado 160

1. Concepto de ecuación de segundo grado.
2. Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.
3. Resolución de ecuaciones de segundo grado completas. I.
4. Resolución de ecuaciones de segundo grado completas. II.
5. Resolución de ecuaciones de segundo grado. Fórmula general.
6. Naturaleza de las soluciones de la ecuación de segundo grado.
7. Propiedades de las soluciones de la ecuación de segundo grado.

Actividades.

TEMA 22

Ecuaciones reducibles a otras de segundo grado 168

1. La ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones.
2. Descomposición de un trinomio de segundo grado en producto de factores.
3. Ecuaciones bicuadradas.
4. Ecuaciones irracionales.

Actividades.

TEMA 23

Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado 174

1. Problemas numéricos de segundo grado. I.
2. Problemas numéricos de segundo grado. II.
3. Problemas geométricos de segundo grado. I.
4. Problemas geométricos de segundo grado. II.

Actividades.

TEMA 24

Representación de la función cuadrática. I. 180

1. Representación gráfica de la función $y = ax^2$. I.
2. Representación gráfica de la función $y = ax^2$. II.
3. Representación gráfica de la función $y = ax^2$. III.
4. Observaciones generales sobre la parábola de ecuación $y = ax^2$.
5. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + c$.

Actividades.

TEMA 25

Representación de la función cuadrática. II. 186

1. Representación gráfica de la función $y = a(x + h)^2$.
2. Representación gráfica de la función $y = a(x + h)^2 + k$.
3. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$.
4. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$.

Actividades.

Algunas fórmulas importantes de la geometría plana 191

TEMA 1 REPASO DEL NÚMERO ENTERO

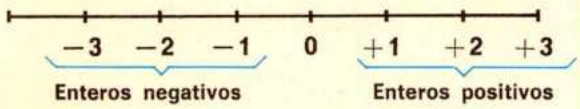
1. Números enteros: positivos y negativos

Conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Z}$ = CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$

Segmento unidad **u**



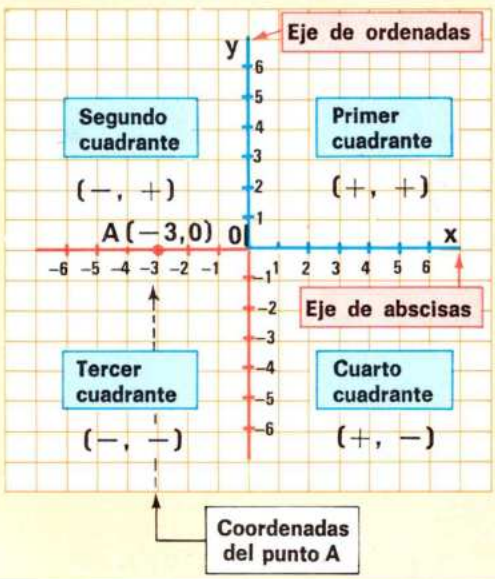
Cada número entero lleva el signo + o el signo −. El número entero 0 se suele escribir sin signo.

Observa, representada en una recta, una parte del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Para ello, a la izquierda y a la derecha del punto 0 se ha llevado un segmento unidad **u**.

Los números positivos quedan a la derecha del punto 0 y los negativos quedan a la izquierda de dicho punto.

Ejes de coordenadas.

EJES DE COORDENADAS



Observa las dos rectas perpendiculares **x** e **y**, que se cortan en el punto 0, que se llama **origen de coordenadas.**

Estas rectas **x** e **y** se llaman **ejes de coordenadas.**

El eje **x** se llama **eje de abscisas.**

El eje **y** se llama **eje de ordenadas.**

En cada eje, los números positivos se representan en la semirrecta azul, y los números negativos en la semirrecta roja.

El plano queda dividido por los ejes de coordenadas en cuatro cuadrantes.

A cada par de números enteros corresponde un punto del cuadriculado; a cada punto del cuadriculado corresponde un par de números enteros.

Así, al par (−3, 0) le corresponde el punto **A**.

Se dice que −3 y 0 son las **coordenadas** del punto **A**.

−3 es la abscisa del punto **A**.

0 es la ordenada del punto **A**.

Valor absoluto de un número entero.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

$/-8/ = 8$ se lee **valor absoluto de menos ocho es igual a ocho**

Valor absoluto de un número entero es el número natural que resulta de prescindir del signo. El valor absoluto se expresa escribiendo el número entero con su signo entre barras:

$/-5/ = 5$ $\qquad$ $/+5/ = 5$

Actividades

1. Los números enteros positivos sirven para expresar cantidades positivas, y los números enteros negativos, para expresar cantidades negativas.

Escribe con el número entero correspondiente:

a) Siete grados bajo cero.

b) Pitágoras vivió en el año 500 antes de Cristo.

c) Andrés ganó 8.000 ptas. y Luis perdió 7.500 ptas.

d) He sacado de mi cuenta 16.000 ptas.

e) He ingresado en mi cuenta 85.000 ptas.

f) La temperatura bajó 12 grados.

g) La temperatura subió 17 grados.

2. Escribe:

a) Los siete primeros números enteros positivos.

b) Los siete primeros números enteros negativos.

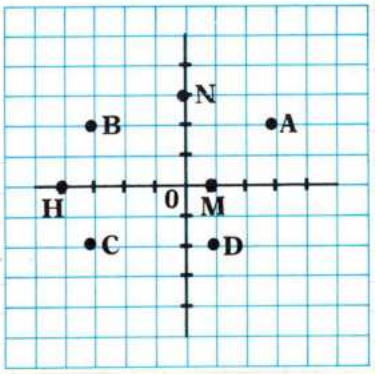
c) Los números enteros comprendidos entre -5 y $+5$.

d) Los números enteros mayores que -3 y menores que $+3$.

3. Observa los ejes de coordenadas y escribe las coordenadas de los puntos **A**, **B**, **C**, **D**, **M**, **N** y **H**.

¿Hay algún punto, además del punto **N**, que tenga la abscisa cero?

¿Hay algún punto, además del punto **M**, que tenga la ordenada cero?



4. Dibuja unos ejes de coordenadas y representa los siguientes puntos:

a) $(+3, +3)$ c) $(+3, -3)$

b) $(-3, +3)$ d) $(-3, -3)$

5. De dos números enteros cualesquiera, es mayor el que en la recta numérica está más a la derecha.

Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros:

$+5, -7, -2, 0, +3, -1, 1, -3, 4$

6. Escribe el valor absoluto de los siguientes números:

a) -7 i) -100

b) -10 j) $+125$

c) $+17$ k) -16

d) $+34$ l) $+49$

e) -24 m) -90

f) -48 n) $+90$

g) -25 o) $+150$

h) $+100$

7. Contesta:

a) Comparando los valores absolutos ¿cuál es el mayor entre dos números enteros positivos? ¿Y entre dos números enteros negativos?

b) ¿Qué es mayor, el cero (0) o un número entero negativo?

8. Escribe dos números enteros diferentes que tengan igual el valor absoluto.

9. Dibuja un par de rectas perpendiculares en una hoja de papel cuadriculado. Estas dos rectas son dos ejes de coordenadas.

a) Representa en estos ejes cinco puntos que tengan la misma ordenada.

b) Representa también cinco puntos que tengan la misma abscisa.

c) Representa cinco puntos que tengan la misma abscisa y la misma ordenada.

2. Suma y resta de números enteros

Suma de enteros del mismo signo.

SUMA DE ENTEROS DEL MISMO SIGNO

- $(+20) + (+10) = +30$
- $(-20) + (-10) = -30$

Observa estas sumas.

Para sumar dos números enteros del mismo signo se suman los valores absolutos y a la suma se le pone el mismo signo de los sumandos.

Suma de enteros de distinto signo.

SUMA DE ENTEROS DE DISTINTO SIGNO

- $(+60) + (-20) = +40$
- $(-60) + (+20) = -40$

Observa estas sumas.

Para sumar dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y a la diferencia se le pone el signo del sumando de mayor valor absoluto.

Propiedades de la suma de números enteros.

PROPIEDADES DE LA SUMA

Propiedad asociativa	$(a+b) + c = a + (b+c)$
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$
0 = elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$
Elemento opuesto de a es $-a$	$a + (-a) = 0$

Como la suma de números naturales, la suma de números enteros tiene las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro.

Pero además la suma de números enteros tiene una propiedad que no tiene la suma de números naturales, y es que en la suma de números enteros existen opuestos, es decir, **para cada número entero existe otro que sumado con él da el 0.**

Así: $(-5) + (+5) = 0$, $(-3) + (+3) = 0$.

En general: $a + (-a) = 0$.

Los números que como (-5) y $(+5)$ sumados dan el cero se llaman números **opuestos.**

Resta de números enteros.

RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

Resta de enteros — Suma del opuesto del sustraendo

- $(-4) - (+5) = (-4) + (-5) = -9$
- $(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8$
- $(-2) - (-6) = (-2) + (+6) = +4$

Observa cómo cada resta de números enteros se convierte en una suma.

Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Actividades

1. Haz las siguientes sumas:

a) $(+13) + (+8)$

b) $(-13) + (-8)$

c) $(+13) + (-8)$

d) $(-13) + (+8)$

e) $(+56) + (+72)$

f) $(-56) + (-72)$

g) $(+56) + (-72)$

h) $(-56) + (+72)$

2. Haz las siguientes restas:

a) $(-38) - (-12)$

b) $(+38) - (+12)$

c) $(-38) - (+12)$

d) $(+38) - (-12)$

e) $(+42) - (-47)$

f) $(+42) - (+47)$

g) $(-42) - (-47)$

h) $(-42) - (+47)$

3. ¿Qué propiedades se ponen de manifiesto en cada una de las siguientes igualdades?

a) $(+7) + (-3) = (-3) + (+7)$

b) $(-8) + (0) = -8$

c) $[(+1) + (-5)] + (+9) =$
$= (+1) + [(-5) + (+9)]$

d) $(+18) + (-18) = 0$

e) $(-15) + (+15) = 0$

f) $(+9) + (-5) = (-5) + (+9)$

4. Representa y escribe:

a) Los números negativos mayores que -5.

b) Los números positivos menores que 5.

c) Todos los números enteros que verifican $/\mathbf{x}/ < 6$.

d) Todos los números enteros $\mathbf{x}$ que verifican $/\mathbf{x}/ = 6$.

5. Contesta:

a) ¿Cuál es el elemento neutro de la suma de números enteros? ¿Por qué?

b) Calcula el opuesto del opuesto de 5.
¿Cuál es el opuesto del opuesto de un número entero?

c) ¿Puede ser la diferencia de dos números enteros negativos un número entero positivo? Pon un ejemplo.

d) ¿Cuál es la suma de dos números opuestos o simétricos?

e) ¿Tiene la resta de números enteros la propiedad conmutativa? Pon un ejemplo.

f) ¿Qué propiedad de la suma de los números enteros no la tiene la suma de números naturales?

6. Halla dos números $\mathbf{x}$ tales que $/\mathbf{x}/ = 5$.

7. Escribe siete números enteros tales que verifiquen $/\mathbf{x}/ < 4$.

8. Escribe los números enteros comprendidos entre -13 y 3.
Escribe también los opuestos de estos números.
¿Entre qué números enteros están comprendidos estos opuestos?

9. ¿En qué parte de la recta están situados los opuestos de los números enteros positivos?

10. Una sustancia que está a 11 grados bajo cero se calienta hasta ponerse a una temperatura de 11 grados sobre cero.
¿Cuál es la variación de la temperatura?

11. Una pieza metálica está a 6 grados bajo cero. Se calienta hasta que pasa a la temperatura de 45°.
¿Cuál es la variación de temperatura?

12. En un juego, Antonio ganó 320 cromos, después perdió 150 cromos, más tarde ganó 420 cromos y después perdió 180 cromos.
¿Cuál fue el resultado del juego?

3. Multiplicación y división de números enteros

Producto de dos números enteros.

PRODUCTO DE ENTEROS DEL MISMO SIGNO

- $(+5) \cdot (+6) = +30$
- $(-5) \cdot (-6) = +30$

PRODUCTO DE ENTEROS DE DISTINTO SIGNO

- $(+5) \cdot (-6) = -30$
- $(-5) \cdot (+6) = -30$

Regla de los signos del producto

+ por + es igual a +
− por − es igual a +
+ por − es igual a −
− por + es igual a −

Observa estos productos de números enteros del mismo signo.

Para multiplicar dos números enteros del mismo signo se multiplican sus valores absolutos y al producto se le pone el signo más (+).

Observa ahora estos dos productos de enteros de distinto signo.

Para multiplicar dos números enteros de distinto signo se multiplican los valores absolutos y al producto se le pone el signo menos (−).

Observa la regla de los signos del producto.

Propiedades del producto de números enteros.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO

Propiedad asociativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Propiedad conmutativa $a \cdot b = b \cdot a$

1 = elemento neutro $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Propiedad distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Sacar el factor común $p \cdot b + p \cdot c = p \cdot (b + c)$

Factor común

Al igual que el producto de números naturales, el producto de números enteros tiene las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro.

El elemento neutro de la multiplicación, llamado también **elemento unidad,** es el 1:

$$a \cdot 1 = a$$

La propiedad distributiva del producto respecto de la suma permite transformar productos en sumas y viceversa. Esta propiedad se expresa así:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Cuando esta propiedad se escribe en esta forma

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

se dice que se ha sacado el factor común **a**.

División exacta de enteros.

DIVISIÓN EXACTA

$(+12) : (+4) = +3$
$(-12) : (-4) = +3$

Regla de los signos de la división

+ entre + igual a +
− entre − igual a +
+ entre − igual a −
− entre + igual a −

Dados dos enteros **a** y **b**, si la división $a : b = c$ es exacta, entonces $a = b \cdot c$, y se dice que **a** es múltiplo de **b** y que **a** es divisible por **b**.

Observa que la regla de los signos para la división exacta de enteros es análoga a la de la multiplicación.

Actividades

1. Calcula:

a) $(+5)\cdot(+8)$ e) $(+9)\cdot(+6)$

b) $(-5)\cdot(-8)$ f) $(-9)\cdot(-6)$

c) $(-5)\cdot(+8)$ g) $(+9)\cdot(-6)$

d) $(+5)\cdot(-8)$ h) $(-9)\cdot(+6)$

2. Calcula y contesta:

a) $(-6)\cdot(+4)$ e) $0\cdot(-5)$

b) $(+4)\cdot(-6)$ f) $(-8)\cdot 0$

c) $(-7)\cdot(-4)$ g) $(+1)\cdot(-7)$

d) $(-4)\cdot(-7)$ h) $(+1)\cdot(+8)$

Compara los resultados de a) y b) y los de c) y d). ¿Qué observas?

¿Qué resulta al multiplicar un número entero por cero? ¿Y al multiplicar un número entero por $+1$? ¿Cuál es el elemento neutro de la multiplicación de números enteros? ¿Qué ha de suceder para que el producto de dos números enteros:

a) sea positivo?

b) sea negativo?

c) sea 0?

3. Recuerda que el signo de un producto de varios números enteros es positivo o negativo según que el número de factores negativos sea par o impar.

Calcula con su signo:

a) $(-5)\cdot(-2)\cdot(+4)\cdot(-7)$

b) $(-3)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(+5)\cdot(+6)$

c) $(-1)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(+5)\cdot(+2)\cdot(-1)$

d) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

4. Contesta:

- Si $\mathbf{x}$ es un número entero cualquiera ¿cuánto vale $\mathbf{x}\cdot 0$?
- Se sabe que $(-7)\cdot\mathbf{a}=-7$. ¿Qué número entero es $\mathbf{a}$?
- Si $\mathbf{m}$ es un número entero distinto de 0 y $\mathbf{m}\cdot\mathbf{p}=0$ ¿qué número debe ser $\mathbf{p}$?
- ¿Hay algún número entero que multiplicado por 3 dé 1?

5. Haz las siguientes divisiones exactas:

a) $-72:12$ g) $0:(+5)$

b) $-72:6$ h) $(-60):(-12)$

c) $\dfrac{-15}{-5}$ i) $\dfrac{-90}{+15}$

d) $+39:-13$ j) $(-200):(-40)$

e) $(+6):(-6)$ k) $(-200):(+40)$

f) $\dfrac{-75}{+15}$ l) $\dfrac{-6}{-3}$

6. Escribe seis múltiplos de $+4$. ¿Son estos números múltiplos de -4?

Recuerda que si un número $\mathbf{a}$ es múltiplo de $+4$, entonces se tiene: $\mathbf{a}=(+4)\cdot\mathbf{h}$, siendo $\mathbf{h}$ un número entero, $\mathbf{h}\in\mathbb{Z}$. Prueba que el conjunto de los múltiplos de $+4$ es igual al conjunto de los múltiplos de -4.

7. Recuerda que un número:

- Es divisible por 2 cuando acaba en 0 o en cifra par.
- Es divisible por 5 si acaba en 0 o en 5.
- Es divisible por 4 o por 25 si las dos últimas cifras forman un número divisible por 4 o por 25.
- Es divisible por 3 o por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 3 o por 9, respectivamente.

Indica cuáles de los siguientes números son divisibles por 2, cuáles por 3, cuáles por 5 y cuáles por 9:

$+240$ -360 $+90$ $+72$ -104 $+108$

8. Saca factor común en las siguientes expresiones:

a) $(+6)\cdot(-8)+(+6)\cdot(-9)$

b) $(-5)\cdot(+3)+(-5)\cdot(-12)$

c) $\mathbf{a}\cdot(-2)+\mathbf{a}\cdot(-6)$

d) $(-7)\cdot(-9)+(-7)\cdot(+5)$

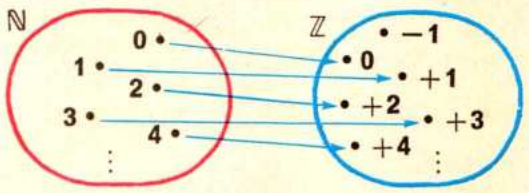
e) $\mathbf{a}\cdot(-5)+\mathbf{a}\cdot(-8)$

f) $\mathbf{a}\cdot(-4)+\mathbf{a}\cdot(-7)$

4. Simplificación de la escritura de enteros

Identificación de los números naturales y de los números enteros positivos.

INCLUSIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES EN LOS ENTEROS



$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$

Observa el diagrama de una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Esta aplicación identifica los números naturales con los números enteros positivos:

5 se identifica con +5

Esta identificación permite considerar los números naturales como una parte de los enteros y permite escribir el conjunto $\mathbb{Z}$ así:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, \underbrace{-4, -3, -2, -1}_{\text{Enteros negativos}}, 0, \underbrace{1, 2, 3, 4, \ldots}_{\text{Enteros positivos}}\}$

Números naturales

Escritura simplificada de sumas de enteros.

ESCRITURA SIMPLIFICADA DE SUMAS

① $+3 - 4 + 7 - 2$

② $3 - 4 + 7 - 2$ ← Polinomio aritmético

CÁLCULO DEL POLINOMIO ARITMÉTICO

$3 - 4 + 7 - 2$ ⓐ $= (3 + 7) - (4 + 2)$ ⓑ $= 10 - 6 = 4$

Observa cómo se simplifica la suma de números enteros: $(+3) + (-4) + (+7) + (-2)$

① Se prescinde de los signos de sumar.

② Si el primer sumando es positivo, se suele escribir sin signo y resulta un polinomio aritmético.

Para calcular este polinomio aritmético se procede así:

ⓐ Se suman por separado los números con signo + y los números con signo −.

ⓑ Se resta el segundo resultado del primero.

Escritura simplificada de expresiones con sumas y restas.

① **EXPRESIÓN EN FORMA DE SUMA**

$(+3) + (-2) + (-4) + (+1)$

② **SUMA SIMPLIFICADA**

$3 - 2 - 4 + 1 = (3 + 1) - (2 + 4) = 4 - 6 = -2$

Vamos a calcular: $(+3) - (+2) + (-4) + (+1)$.

Se procede del modo siguiente:

① Se escribe la expresión en forma de suma.

② Después se simplifica la suma y resulta:

$3 - 2 - 4 + 1 = (3 + 1) - (2 + 4) = 4 - 6 = -2$

Cálculo con paréntesis.

PARÉNTESIS PRECEDIDO DEL SIGNO +

$6 + (-3 + 5) = 6 - 3 + 5 = 8$

PARÉNTESIS PRECEDIDO DEL SIGNO −

$7 - (-4 + 9) = 7 + 4 - 9 = 2$

Un paréntesis precedido del signo más (+) se puede suprimir sin cambiar los signos de los números que hay en el interior del paréntesis.

Cuando se suprime un paréntesis precedido del signo menos (−) se cambian todos los signos del interior del paréntesis.

Actividades

1. Escribe las siguientes sumas en forma simplificada y calcula el polinomio aritmético que resulte:

a) $(-9) + (+5) + (-6) + (-4)$

b) $(-7) + (-3) + (+8) + (+3)$

c) $(-2) + (-5) + (-6) + (-8)$

d) $(-5) + (+9) + (-4) + (-6)$

2. Simplifica la escritura y calcula el valor de cada expresión:

a) $(-9) + (+4) - (-7) - (+2)$

b) $(+10) - (-12) - (-6) + (-3)$

c) $(-5) + (-4) - (-6) - (+3)$

d) $(+4) - (-5) - (-10) - (+2)$

3. De ahora en adelante escribiremos los números enteros positivos como números naturales y haremos uso de la escritura simplificada de enteros.

Calcula:

a) $3 - 15 - 6 + 15 + 8 - 3 =$
$= (3 + 15 + 8) - (15 + 6 + 3)$

b) $-7 - 9 + 19 - 3 + 8$

4. Calcula:

a) $-2 - (-8 + 6)$

b) $-6 - (12 - 3)$

c) $4 - (1 - 8)$

d) $15 - (8 - 3 - 7)$

e) $7 - (-4 - 2 + 3)$

f) $3 - (-4 - 5 - 7)$

g) $-9 - (-12 + 1)$

h) $-13 - (-7 + 3 - 5)$

i) $8 - (-7 + 3 - 1)$

5. Contesta:

a) ¿Con qué número entero se identifica el número natural 12?

b) ¿Se puede eliminar un paréntesis precedido del signo + sin hacer ningún cambio de signo en el interior del paréntesis? Pon un ejemplo.

6. Observa el ejercicio resuelto y calcula los demás:

a) $6 - [9 - (5 - 7) + 4] =$
$= 6 - 9 + (5 - 7) - 4 =$
$= 6 - 9 + 5 - 7 - 4 =$
$= (6 + 5) - (9 + 7 + 4) =$
$= 11 - 20 = -9$

b) $5 - [7 - 2 - (1 - 9) - 3 + 12] + 4$

c) $1 - (-3 + 6 + 1) -$
$- [4 - (6 - 3 + 1) - 2]$

d) $6 - [3 - (8 - 5) + 2]$

e) $6 - (-9 + 7 - 1) -$
$- [3 - (-5 + 4 + 6) - 1]$

7. El signo − cuando va delante de un número indica el opuesto de dicho número.

Calcula los opuestos:

a) $-(-5 + 7) = +5 - 7 = -2$

b) $-(-6 + 1)$

c) $-(3 + \mathbf{x} - 1)$

d) $\mathbf{-(a - b + a)}$

e) $-(15 - 3)$

f) $-(12 - \mathbf{a} + 7)$

g) $\mathbf{-(m - p - q)}$

8. Calcula:

a) $(5 + 6) - (3 + 8)$

b) $-5 + 6 - 8 - (3 + 5 - 3)$

c) $-7 - 9 - (-15 + 20 - 5)$

d) $100 - 60 - (400 - 600 + 15)$

9. Escribe:

a) Un polinomio aritmético con cuatro números naturales cuya suma sea 0.

b) Un polinomio aritmético con cinco números naturales cuya suma sea 6.

c) Una suma de dos números enteros que dé 0.

d) El mayor número entero negativo.

5. Potencias. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Potencia de base entera y de exponente natural.

Base	Exponente	Potencia	Ejemplos
positiva	par o impar	positiva	$4^2 = 16$ $4^3 = 64$
negativa	par	positiva	$(-4)^2 = 16$
	impar	negativa	$(-4)^3 = -64$

Observa estas potencias y recuerda:

- Si la base es positiva, la potencia es siempre positiva.
- Si la base es negativa y el exponente es par, la potencia es positiva.
- Si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia es negativa.

Operaciones con potencias de base entera.

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE $a^m : a^p = a^{m-p}$

POTENCIA DE UNA POTENCIA $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$

POTENCIA DE UN PRODUCTO $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

Observa que cuando se multiplican dos potencias de la misma base se suman los exponentes:

$$(-3)^5 \cdot (-3)^2 = (-3)^{5+2} = (-3)^7$$

Observa también que cuando se dividen dos potencias de la misma base se restan los exponentes:

$$(-5)^6 : (-5)^2 = (-5)^{6-2} = (-5)^4$$

Observa que para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes:

$$[(-2)^4]^3 = (-2)^{4 \times 3} = (-2)^{12}$$

Recuerda cómo se eleva un producto a una potencia. Para ello se eleva cada uno de los factores a dicha potencia:

$$[2 \cdot 5 \cdot (-3)]^3 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot (-3)^3$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de números enteros.

m.c.d. y m.c.m. de 24 y −180

① $24 = 2^3 \times 3$
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

② $\text{m.c.d.}(24, 180) = 2^2 \cdot 3 = 12$
$\text{m.c.m.}(24, 180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

m.c.d. y m.c.m. de 8 y 9

$8 = 1 \cdot 2^3$
$9 = 1 \cdot 3^2$

$\text{m.c.d.}(8, 9) = 1$
$\text{m.c.m.}(8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

$D(8) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$
$D(9) = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$

Para hallar el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo de números enteros se hace como si se tratara de números naturales.

Observa cómo se halla el m.c.d. y el m.c.m. de 24 y −180.

① Se descomponen los números en factores primos.

② Para el m.c.d. se toman los factores primos comunes con el menor exponente:

$$\text{m.c.d.}(24, -180) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Para el m.c.m. se toman los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente:

$$\text{m.c.m.}(24, -180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Si dos números no tienen más divisor común que 1 y −1 se llaman **primos entre sí.** En este caso, el m.c.d. es 1 y el m.c.m. es el producto de ambos números.

El m.c.d. de dos números primos entre sí es 1 y su m.c.m. es su producto.

Actividades

1. Contesta:

a) ¿Qué signo puede tener la potencia de un número entero negativo?

b) ¿Qué signo tiene el cuadrado de un número entero?

c) Cuando se multiplican potencias de la misma base ¿qué operación se hace con los exponentes?

d) Cuando se dividen potencias de la misma base ¿qué operación se hace con los exponentes?

2. Calcula:

a) $(-5)^0 = 1$, $(-5)^1 = -5$, $(-5)^2$, $(-5)^3$, $(-5)^4$, $(-5)^5$, $(-5)^6$

b) $(-10)^0$, $(-10)^1$, $(-10)^2$, $(-10)^3$, $(-10)^4$, $(-10)^5$, $(-10)^6$

3. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^6$

b) $(-6)^{10} : (-6)^5$

c) $(-8)^5 \cdot (-8)^3$

d) $(-2)^4 \cdot (-2) \cdot (-2)^3$

e) $(-4)^7 : (-4)^2$

f) $(-3)^5 : (-3)^4$

g) $\mathbf{a}^{12} \cdot \mathbf{a}^3$

h) $\mathbf{a}^{12} : \mathbf{a}^3$

i) $\mathbf{a}^{12} : \mathbf{a}^{12}$

4. Expresa en forma de una sola potencia:

a) $[(-3)^2]^5$

b) $[(-2)^4]^3$

c) $[(-5)^2]^4$

d) $\mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{b}^3 \cdot \mathbf{c}^3$

e) $\mathbf{a}^7 \cdot \mathbf{b}^7$

f) $\mathbf{x}^5 \cdot \mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{x}$

g) $\mathbf{x}^6 \cdot \mathbf{x}^3$

h) $\mathbf{x}^7 : \mathbf{x}^4$

5. Qué número:

a) multiplicado por $2 \cdot 3^2$ da como resultado $2^2 \cdot 3^3$?

b) multiplicado por $2^3 \cdot (-3)$ da como resultado $2^3 \cdot 3^2$?

c) multiplicado por 2^0 da como resultado $2^2 \cdot 3^2$?

6. Los números que no tienen más divisores positivos que ellos y la unidad se llaman **números primos**. Escribe los quince primeros números primos positivos.

7. Halla el m.c.d. y el m.c.m., en cada caso, por descomposición en producto de factores primos:

a) 16, 18, 20

b) 160 y 125

c) 72, 56, 90

d) 144 y 324

e) 64, 32, 128

f) 180 y 150

g) 55, 11, 44

h) 360 y 720

8. Escribe dos números primos entre sí y calcula su m.c.d. y su m.c.m.

9. Contesta:

a) Si m.c.d.$(\mathbf{a}, 60) = 15$ ¿es **a** múltiplo de 15? ¿Es **a** múltiplo de 30?
Razona tu respuesta.

b) Si m.c.d.$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$ ¿qué puedes decir de **a** y de **b**?

c) Si m.c.d.$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ ¿cómo son **a** y **b**?

10. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los números 360 y 240. Comprueba después que se verifica la fórmula:

$$360 \times 240 = \text{m.c.d.}(360, 240) \times \text{m.c.m.}(360, 240)$$

y en general:

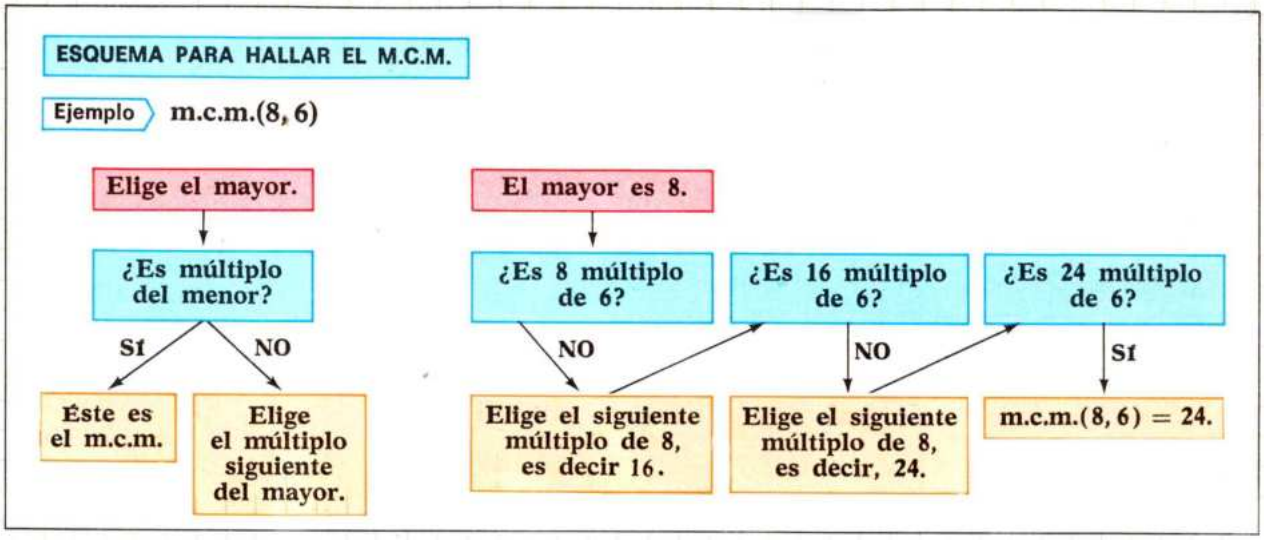
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \text{m.c.d.}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \times \text{m.c.m.}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

11. Se sabe que $\text{m.c.m.}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\text{m.c.d.}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$

Aplica esta fórmula para hallar el m.c.m. de dos números **a** y **b** sabiendo que m.c.d.$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 12$ y que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 8.640$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

Un método práctico para calcular el m.c.m. de dos números sencillos es seguir mentalmente el siguiente esquema:



Aplica este esquema y calcula el mínimo común múltiplo de:

① 6 y 4 ② 6 y 9 ③ 6 y 15 ④ 6 y 30 ⑤ 8 y 12 ⑥ 8 y 20 ⑦ 12 y 20 ⑧ 18 y 12 ⑨ 20 y 30 ⑩ 500 y 1.000

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa en unos ejes de coordenadas los siguientes puntos:

a) $(-3, 7)$ c) $(-3, -3)$

b) $(-4, 4)$ d) $(0, 0)$

2. Escribe todos los números enteros **x** tales que $/x/ < 5$.

3. ¿Cuáles son los únicos números enteros **x** que verifican $/x/ = 10$?

4. Calcula el resultado de estas operaciones:

a) $(-5) \cdot 30 \cdot (-1)$ d) $5^4 \cdot 3^2$

b) $10 \cdot (-10) \cdot (-10)$ e) $-48 : -6$

c) $(-1)^5 \cdot 2^3 \cdot 3$ f) $-180 : 15$

5. De los siguientes números, indica los que son divisibles por 2, por 3, por 4, por 5, por 6 y por 7:

354 903 504 720 1.296

6. Calcula:

a) $7 - [3 - (2 - 7) - 4]$

b) $13 - [5 - (4 - 9) + 7]$

c) $28 - [21 - (12 - 3) - 7]$

d) $12 - [14 - (6 - 4) + 2]$

7. Expresa en forma de una sola potencia:

a) $[x^2]^3$ k) $x^6 : x^6$

b) $[x^5]^2$ l) $x^6 : x$

c) $x^7 \cdot x^2$ m) $[(-3)^2]^4$

d) $x^5 \cdot y^5$ n) $[(-2)^3]^5$

e) $x^3 \cdot x^2 \cdot x$ o) $(3^2)^6$

f) $x^5 : x^2$ p) $(x^4)^2$

g) $x^2 : x$ q) $(x^3)^3$

h) $x^3 : x$ r) $[(-2)^5]^2$

i) $x^3 : x^2$ s) $x : x$

j) $x^6 : x^5$ t) $x^2 : x$

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

1. Expresa el número 20 empleando cuatro nueves.
2. Expresa el número 100 empleando también cuatro veces la cifra 9.
3. Forma el número 34 utilizando cuatro veces la cifra 3.
4. Expresa el número 31 utilizando solamente la cifra 3.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Observa la siguiente tabla de vehículos automóviles en circulación en una ciudad:

Clase	1980	1981	1982	1983
Turismos	3.915	4.152	4.982	4.238
Motocicletas	1.521	1.213	1.199	1.714
Autobuses	148	162	198	201
Camiones	1.241	1.192	1.207	1.201

a) Determina los incrementos anuales sufridos por el número de cada una de las clases de vehículos en circulación.

b) Determina los años con incremento negativo en el número de turismos, en el número de motocicletas, en el número de autobuses y en el número de camiones.

c) Determina el año con mayor incremento en el número de cada una de las clases de vehículos.

2. El cajero automático de un Banco registra con números positivos las entradas de dinero y con números negativos los reintegros. Durante tres horas de una mañana se han registrado los siguientes movimientos:

Horas	
9-10	$-15.000+7.250-14.000-27.785+$ $+17.619-36.725-41.815+4.145-$ -3.000
10-11	$-12.000-11.245+12.185+142.343-$ $-19.720-45.000-21.740+5.000$
11-12	$+2.148-34.728-17.129+11.728-$ $-67.192-9.128-15.172+1.472+$ $+10.000$

a) Determina el saldo parcial al final de cada hora y el saldo total de las tres horas.

b) ¿Cuál es el mayor reintegro que se ha producido? ¿Y la mayor entrada?

3. Al construir un edificio de 10 plantas y 3 sótanos, el nivel de la calle en donde está se considera la cota o altura 0; por encima, las alturas o cotas son positivas, y por debajo, negativas.

Calcula la distancia recorrida por un ascensor que va:

— de la cota -7 a la cota $+25$;
— de la cota -2 a la cota -8;
— de la cota $+4$ a la cota $+15$;
— de la cota 0 a la cota -6.

4. Considera este cuadro de temperaturas:

Ciudad	Temperaturas	
	Mínima	Máxima
Madrid	4°	12°
Roma	8°	16°
Oslo	$-2°$	4°
Moscú	$-9°$	$-1°$
París	$-3°$	7°
Estocolmo	$-4°$	1°

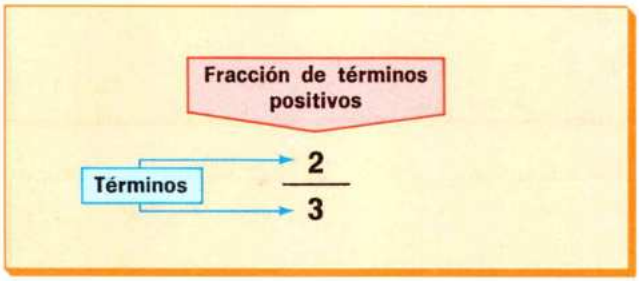
Determina las temperaturas mínima y máxima de las ciudades A, B, C y D si:

— La mínima de A es menor que la de Oslo y es un divisor de las máximas de Madrid y Roma, y la máxima de A es el triple de la de Moscú.
— La mínima de B es el doble de la de Moscú y la máxima es un divisor negativo de las de Oslo y Moscú.
— La mínima de C es un divisor positivo de las mínimas de Moscú, París y Roma, y la máxima de C es el doble de la de París.
— La mínima de D es un divisor negativo de las de Madrid y París y la máxima es un divisor positivo de las de Estocolmo y Moscú.

TEMA 2 FRACCIONES

1. Fracciones de términos enteros positivos. I

Diversos significados de fracción.



Observa la fracción $\frac{2}{3}$. Los dos términos de esta fracción (2 y 3) son **números enteros positivos** o **números naturales.**

Una fracción de términos positivos como la fracción $\frac{2}{3}$ se puede interpretar de varias formas, es decir, tiene varios significados.

PRIMER SIGNIFICADO

La fracción como una o varias partes de un objeto o unidad.

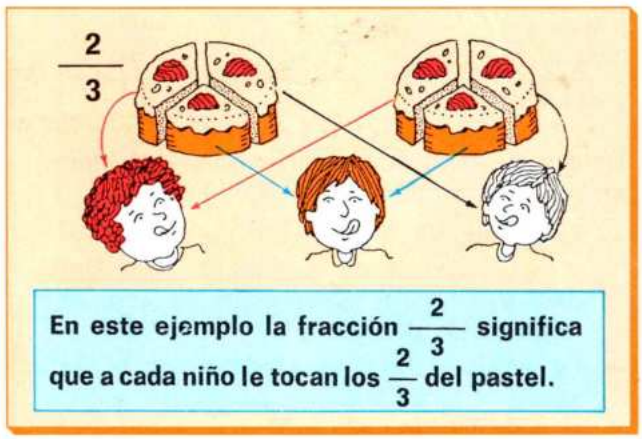
En este ejemplo la fracción $\frac{2}{3}$ significa que se han pintado los $\frac{2}{3}$ de la puerta.

El pintor ha pintado los $\frac{2}{3}$ de la puerta.

En este caso el denominador (3) indica las partes en que se divide el objeto o unidad (en este caso la puerta) y el numerador (2) indica las partes que se han pintado.

SEGUNDO SIGNIFICADO

La fracción como cociente de dos números.



En este ejemplo la fracción $\frac{2}{3}$ significa que a cada niño le tocan los $\frac{2}{3}$ del pastel.

Los tres niños se han repartido dos pasteles en partes iguales. Cada niño recibe $\frac{2}{3}$ de pastel.

Por eso la fracción $\frac{2}{3}$ es el cociente de dividir 2 entre 3, es decir, $2 : 3 = \frac{2}{3}$

En una división **a : b**, el divisor no puede ser cero. Por eso, en una fracción $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ el denominador **b** ha de ser siempre un número distinto de cero ($\mathbf{b} \neq 0$).

1. **Colorea:**

a) Los $\frac{3}{4}$ de un círculo. b) Los $\frac{3}{5}$ de un rectángulo. c) Los $\frac{5}{8}$ de un cuadrado.

2. **Escribe en forma de fracción los cocientes 3 : 5, 2 : 3, 4 : 13, 5 : 6.**

2. Fracciones de términos enteros positivos. II

$$\overline{CD} = \frac{2}{3}\,\overline{AB}$$

En este ejemplo la fracción $\frac{2}{3}$ significa que la medida del segmento $\overline{CD}$ es $\frac{2}{3}$ tomando como unidad el segmento $\overline{AB}$.

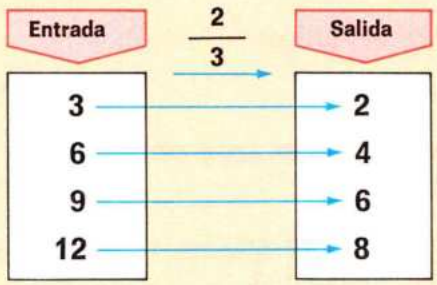
TERCER SIGNIFICADO

La fracción como resultado de una medida.

Cuando medimos segmentos usamos el significado de fracción como resultado de una medida.

Así la medida del segmento $\overline{CD}$ tomando como unidad el segmento $\overline{AB}$ es $\frac{2}{3}$, o sea, $\overline{CD} = \frac{2}{3}\,\overline{AB}$.

En este caso el denominador (3) indica las partes iguales en que se divide la unidad de medida $\overline{AB}$, y el numerador indica cuántas de estas partes contiene el segmento $\overline{CD}$ que se mide.



En este ejemplo la fracción $\frac{2}{3}$ significa un operador que transforma cada múltiplo de 3 en un múltiplo de 2.

CUARTO SIGNIFICADO

La fracción como operador.

La fracción $\frac{2}{3}$ se puede interpretar como un operador o función que actúa sobre los números primero multiplicando por 2 y luego dividiendo por 3.

Observa que la fracción $\frac{2}{3}$ transforma los múltiplos del denominador (3, 6, 9, 12, ...) en múltiplos del numerador (2, 4, 6, 8, ...).

La fracción $\frac{2}{3}$ al actuar sobre los números hace dos cosas: primero multiplica por 2 y después divide por 3.

Ejemplo $\frac{2}{3}$ de 12 $\begin{cases} 12 \times 2 = 24 \\ 24 : 3 = 8 \end{cases}$

1. Calcula $\frac{2}{5}$ de los siguientes números: 5, 10, 15, 20, 40, 50.

2. Calcula en cada caso la entrada o la salida:

a) $40 \xrightarrow{\frac{3}{4}} \square$

b) $80 \xrightarrow{\frac{3}{5}} \square$

c) $\square \xrightarrow{\frac{2}{5}} 30$

d) $100 \xrightarrow{\frac{3}{10}} \square$

e) $\square \xrightarrow{\frac{5}{6}} 25$

f) $\square \xrightarrow{\frac{5}{7}} 100$

3. Fracciones de términos enteros

ALGUNOS ELEMENTOS DEL PRODUCTO $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

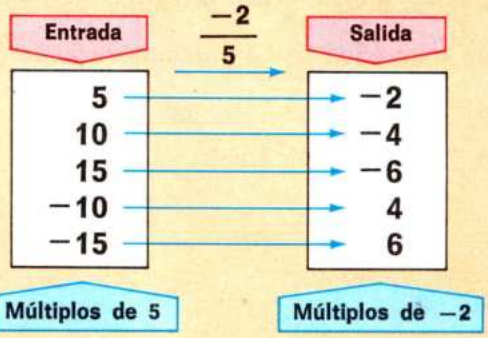
$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Denominadores

$\mathbb{Z}^*$							
-3	$\frac{-2}{-3}$	$\frac{-1}{-3}$	$\frac{0}{-3}$	$\frac{1}{-3}$	$\frac{2}{-3}$	$\frac{3}{-3}$	...
-2	$\frac{-2}{-2}$	$\frac{-1}{-2}$	$\frac{0}{-2}$	$\frac{1}{-2}$	$\frac{2}{-2}$	$\frac{3}{-2}$	...
-1	$\frac{-2}{-1}$	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{0}{-1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{2}{-1}$	$\frac{3}{-1}$	...
1	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	...
2	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	...
$\vdots$							
	... -2	-1	0	1	2	3	$\mathbb{Z}$

Numeradores

EL OPERADOR $\frac{-2}{5}$



El conjunto de las fracciones de términos enteros.

Los términos de las fracciones estudiadas hasta ahora eran números naturales en los que el denominador era distinto de cero.

Pero podemos formar fracciones eligiendo sus términos del conjunto $\mathbb{Z}$, es decir, del conjunto de los números enteros, con la condición de que el denominador sea distinto de cero.

Así los siguientes pares de números son fracciones que tienen por términos números enteros:

$$\frac{0}{2},\ \frac{-4}{5},\ \frac{-2}{3},\ \frac{6}{-7},\ \frac{2}{5}$$

Si se designa por $\mathbb{Z}^*$ el conjunto de todos los números enteros menos el cero, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, resulta que el conjunto infinito **F** de todas las fracciones de términos enteros se obtiene haciendo el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ y escribiendo los pares ordenados **(a, b)** en la forma de fracción $\frac{a}{b}$.

Observa una parte del producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Las fracciones de números enteros como operadores.

Las fracciones de términos enteros se pueden considerar también como operadores.

Observa cómo actúa el operador $\frac{-2}{5}$:

Primero multiplica por -2 y después divide por 5:

Ejemplo $\frac{-2}{5}$ de 15 $\begin{cases} -2 \cdot 15 = -30 \\ -30 : 5 = -6 \end{cases}$

Observa que $\frac{-2}{5}$ transforma los múltiplos del denominador (5, 10, 15, -10, -15, ...) en los múltiplos del numerador (-2, -4, -6, 4, 6, ...).

Fracción $\frac{a}{b}$ es un par ordenado de números enteros (a, b) en el que el segundo (b) es siempre un número distinto de cero.

Toda fracción $\frac{a}{b}$ de números enteros se puede considerar como un operador que actúa sobre los múltiplos de b y los transforma en los múltiplos de a.

Actividades

1. Calcula:

a) $\frac{-3}{4}$ de 8

b) $\frac{-4}{9}$ de 180

c) $\frac{2}{-5}$ de 20

d) $\frac{-8}{15}$ de 60

2. El conjunto $\mathbb{Z}^*$ está formado por todos los números enteros, excepto uno de ellos. ¿Cuál es? ¿Cuál es el único número entero que no puede ser denominador de una fracción?

3. Observa la figura y contesta:

¿Qué fracción es

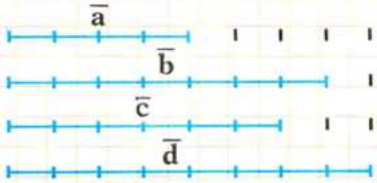
$\overline{a}$ de $\overline{b}$? → $\overline{a} = \frac{4}{7}$ de $\overline{b}$

$\overline{b}$ de $\overline{a}$? →

$\overline{a}$ de $\overline{c}$? →

$\overline{c}$ de $\overline{a}$? →

$\overline{a}$ de $\overline{d}$? →



4. Dibuja dos segmentos $\overline{a}$ y $\overline{b}$ tales que $\overline{b} = \frac{1}{3}$ de $\overline{a}$ y que $\overline{b} = 2$ cm.

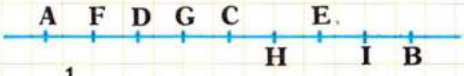
5. Dos segmentos $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son tales que $\overline{a} = \frac{3}{4}$ de $\overline{b}$. Contesta:

a) ¿Cuál es el mayor?

b) Si $\overline{b} = 120$ cm ¿cuánto mide $\overline{a}$?

c) Si $\overline{a} = 15$ cm ¿cuánto mide $\overline{b}$?

6. Observa los segmentos y completa



$\overline{AC} = \frac{1}{2}$ de ...

$\overline{AD}$ = ... de $\overline{AB}$ = ... de $\overline{AC}$

$\overline{AF}$ = ... de $\overline{AB}$ = ... de $\overline{AC}$

$\overline{AH}$ = ... de $\overline{AB}$

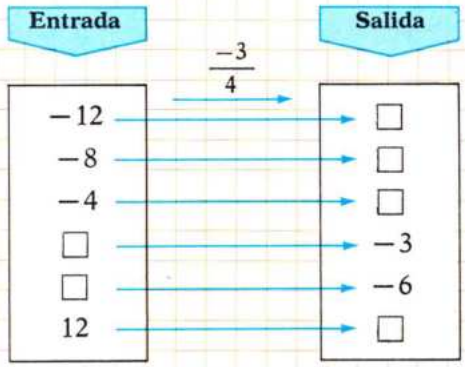
$\overline{AI}$ = ... de $\overline{AB}$

7. Dibuja en un papel cuadriculado un rectángulo de modo que la altura sea los $\frac{2}{5}$ de la base.

8. Toda fracción de términos enteros transforma los múltiplos del denominador (entrada) en los múltiplos del numerador (salida).

Escribe diez de estos múltiplos referidos a la fracción $\frac{5}{6}$

9. Escribe los números que faltan en la entrada y en la salida.



10. Una cinta de 60 metros se ha cortado en dos trozos, y uno mide $\frac{5}{12}$ del total.

¿Cuántos metros mide cada trozo?

11. Reduce a minutos:

a) $\frac{5}{6}$ de hora = $\frac{5}{6}$ de 60 minutos =

$= \frac{5}{6} \times 60$ minutos = 50 minutos.

b) $\frac{2}{3}$ de hora.

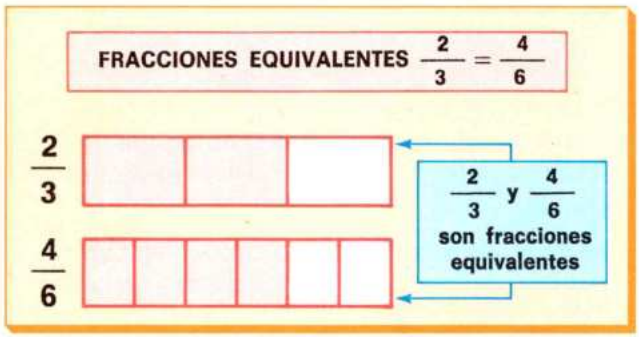
c) $\frac{3}{4}$ de hora.

d) $\frac{2}{5}$ de hora.

e) $\frac{7}{12}$ de hora.

4. Fracciones equivalentes

Fracciones equivalentes cuando son fracciones de términos positivos.

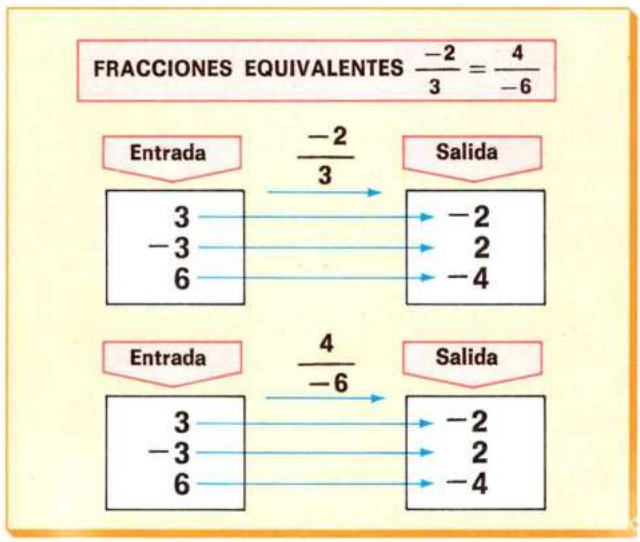


Dos fracciones de términos positivos, como $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$, que no son idénticas pueden tener el mismo valor.

En la representación gráfica de ambas fracciones se observa que las partes coloreadas son iguales. Por eso se dice que $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Fracciones equivalentes cuando son fracciones de términos enteros.

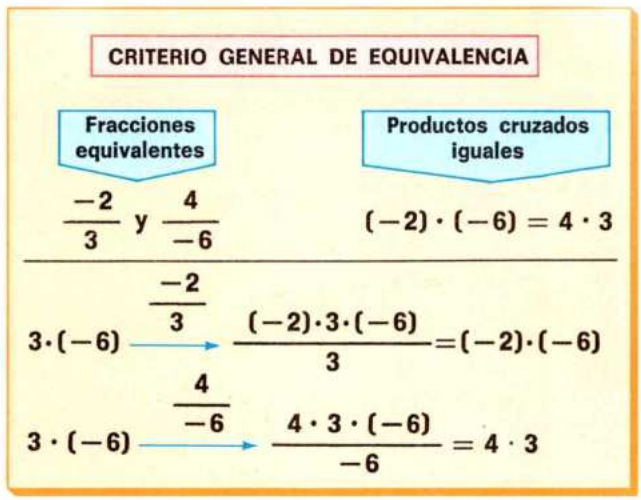


Si alguno de los términos de la fracción es negativo, como ocurre con las fracciones $\frac{-2}{3}$ y $\frac{4}{-6}$, no podemos representarlas como en el caso anterior. Por eso, para averiguar si las fracciones de términos enteros $\frac{-2}{3}$ y $\frac{4}{-6}$ son equivalentes se las considera como operadores.

Observa que cuando las fracciones actúan como operadores, con las mismas entradas producen las mismas salidas; por eso diremos que estas fracciones también son equivalentes, y escribiremos: $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$

Dos fracciones de términos enteros son equivalentes si al actuar sobre un mismo número dan el mismo resultado.

Criterio general de equivalencia.



Acabamos de ver que las fracciones $\frac{-2}{3}$ y $\frac{4}{-6}$ son equivalentes.

Observa que al actuar estas fracciones sobre el producto de los denominadores $3 \cdot (-6)$ da el mismo resultado: $(-2) \cdot (-6) = 4 \cdot 3$. Esta igualdad significa que si se multiplican en cruz los términos de las fracciones $\frac{-2}{3}$ y $\frac{4}{-6}$ se obtiene el mismo resultado.

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si al multiplicar sus términos en cruz se obtiene el mismo resultado: $a \cdot d = b \cdot c$.

Actividades

1. Aplica las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$ al producto de los denominadores $3 \cdot 9$.

¿Se obtiene el mismo resultado?

2. Aplica las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ al producto de los denominadores $b \cdot d$.

$$b \cdot d \xrightarrow{\frac{a}{b}} \frac{a \cdot (b \cdot d)}{b} = \frac{a \cdot b \cdot d}{b} = \dots$$

¿Qué ocurre si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes?

$$b \cdot d \xrightarrow{\frac{c}{d}} \frac{c \cdot (b \cdot d)}{d} = \dots = \dots$$

3. De las siguientes fracciones, escribe, separadas por el signo $=$, las que sean equivalentes:

$$\frac{-1}{3}, \quad \frac{3}{-9}, \quad \frac{-4}{12}, \quad \frac{9}{-27}, \quad \frac{-2}{5}, \quad \frac{-6}{5}$$

4. Contesta:

a) ¿Cuál es la fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ que tiene por denominador 21?

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{21} \longrightarrow x = \dots$$

b) ¿Cuál es la fracción equivalente a $\frac{4}{5}$ que tiene por numerador 24?

5. Calcula la fracción equivalente a:

a) $\frac{-4}{5}$ que tiene por denominador 30.

b) $\frac{6}{8}$ que tiene por numerador 72.

c) $\frac{8}{7}$ que tiene por numerador 360.

6. Escribe dos fracciones con numerador cero y comprueba que son equivalentes.

7. Comprueba que toda fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente a sí misma.

8. Multiplica los dos términos de la fracción $\frac{-4}{5}$ por 2. Comprueba que resulta una fracción equivalente a la dada.

9. Divide los dos términos de la fracción $\frac{12}{18}$ por 6.

Comprueba que la fracción $\frac{12}{18}$ y la fracción que resulta son equivalentes.

10. De las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{10}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{3}{-4}, \quad \frac{1}{18}, \quad \frac{-2}{-3}, \quad \frac{5}{25}, \quad \frac{-6}{-9}, \quad \frac{0}{4}$$

escribe:

a) Las que sean equivalentes a $\frac{-3}{4}$

b) Las que sean equivalentes a $\frac{-1}{-5}$

c) Dos fracciones no equivalentes.

11. Comprueba que si una fracción es equivalente a otra, entonces la segunda es equivalente a la primera.

12. Calcula:

a) La fracción equivalente a $\frac{-6}{8}$ que tiene por numerador -3.

b) La fracción equivalente a $\frac{1}{10}$ que tiene por numerador 10.

c) La fracción equivalente a $\frac{-36}{84}$ que tiene por denominador -21.

13. Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ son equivalentes ¿qué puedes decir de los numeradores **a** y **c**? Justifica tu respuesta.

5. Amplificación y simplificación de fracciones

AMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Fracción dada | Fracciones obtenidas por amplificación

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}$$

Fracciones equivalentes al cambiar el signo a sus términos

- $\frac{4}{-5} = \frac{4 \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{-4}{5}$
- $\frac{-7}{-6} = \frac{(-7) \cdot (-1)}{(-6) \cdot (-1)} = \frac{7}{6}$

Fracciones equivalentes por amplificación.

Luisa escribe fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Para ello multiplica el numerador y el denominador por el mismo número entero.

Las fracciones que resultan son equivalentes. En general, si $m \neq 0$, entonces $\frac{a \cdot m}{b \cdot m}$ es equivalente a $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$$

Para probar que son fracciones equivalentes basta con demostrar que los productos cruzados son iguales:

$$(a \cdot m) \cdot b = (b \cdot m) \cdot a$$

En el caso particular de que $m = 1$, resulta la misma fracción.

Observa que multiplicar por $m = -1$ equivale a cambiar de signo los dos términos de la fracción.

Si se cambia el signo a los dos términos de una fracción que tenga el denominador negativo se obtiene otra fracción equivalente pero con el denominador positivo.

Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero se obtiene una fracción equivalente llamada fracción amplificada.

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

a) **Dividiendo el numerador y el denominador por divisores comunes.**

$$\frac{-18}{12} = \frac{-18:2}{12:2} = \frac{-9}{6} = \frac{-9:3}{6:3} = \frac{-3}{2}$$

Primera simplificación | Segunda simplificación

b) **Dividiendo el numerador y el denominador por su m.c.d.**

m.c.d.(−18, 12) = 6

$$\frac{-18}{12} = \frac{-18:6}{12:6} = \frac{-3}{2}$$

Simplificación directa

Fracciones equivalentes por simplificación.

Simplificar una fracción, por ejemplo $\frac{-18}{12}$, es encontrar otras fracciones equivalentes a $\frac{-18}{12}$ pero que tengan los términos menores.

- Para ello se dividen el numerador y el denominador por divisores comunes de ambos.

  La fracción obtenida $\frac{-3}{2}$ es equivalente a la fracción $\frac{-18}{12}$ porque $(-18) \cdot 2 = (-3) \cdot 12$. La fracción $\frac{-3}{2}$ tiene los términos primos entre sí y, en consecuencia, no se puede simplificar más, y por eso se llama **fracción irreducible.**

- También se puede obtener directamente la fracción irreducible dividiendo los dos términos −18 y 12 por su **máximo común divisor** (6).

Se puede simplificar una fracción dividiendo sus dos términos por un divisor común o, mejor, por su máximo común divisor.

6. Reducción de fracciones a común denominador

Vamos a reducir las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{-5}{6}$ y $\frac{3}{4}$ a común denominador.

Para ello se suelen utilizar los dos métodos siguientes:

MÉTODO DE LOS PRODUCTOS CRUZADOS

Para aplicar el método de los productos cruzados se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de los demás:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{24}{72}$$

$$\frac{-5}{6} = \frac{-5 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-60}{72}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{54}{72}$$

Las fracciones $\frac{24}{72}$, $\frac{-60}{72}$ y $\frac{54}{72}$ son, respectivamente, equivalentes a $\frac{1}{3}$, $\frac{-5}{6}$ y $\frac{3}{4}$, y tienen el mismo denominador.

MÉTODO DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Para aplicar el método del m.c.m. se procede así:

① Se toma como denominador común de todas las fracciones el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\text{m.c.m.}(3, 6, 4) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

② Se multiplica el numerador de cada fracción por el cociente de dividir el m.c.m. por el denominador de esta fracción:

$12 : 3 = 4 \rightarrow 4 \times 1 = 4 \longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

$12 : 6 = 2 \rightarrow 2 \cdot (-5) = -10 \rightarrow \frac{-5}{6} = \frac{-10}{12}$

$12 : 4 = 3 \rightarrow 3 \times 3 = 9 \longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

Las fracciones $\frac{4}{12}$, $\frac{-10}{12}$ y $\frac{9}{12}$ son, respectivamente, equivalentes a $\frac{1}{3}$, $\frac{-5}{6}$ y $\frac{3}{4}$ y tienen el mismo denominador.

1. Simplifica hasta llegar a la fracción irreducible:

a) $\frac{240}{360}$ c) $\frac{72}{48}$ e) $\frac{84}{124}$ g) $\frac{36}{27}$ i) $\frac{1000}{2000}$

b) $\frac{180}{120}$ d) $\frac{56}{90}$ f) $\frac{540}{900}$ h) $\frac{400}{600}$ j) $\frac{480}{720}$

2. Escribe doce fracciones equivalentes a $\frac{-5}{6}$

3. Simplifica la fracción $\frac{x}{y}$ en los siguientes casos:

a) $\begin{cases} x = 2^4 \cdot 3 \\ y = 2^3 \cdot 3^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2^4 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{2}{3}$

b) $\begin{cases} x = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ y = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ y = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \end{cases}$

4. Reduce a común denominador:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{5}$ b) $\frac{6}{8}$ y $\frac{2}{5}$ c) $\frac{-3}{2}$ y $\frac{1}{8}$ d) $\frac{2}{7}$ y $\frac{4}{35}$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

Calcula:

① $\frac{2}{3}$ de 6 ④ $\frac{2}{3}$ de 30 ⑦ $\frac{2}{5}$ de 20 ⑩ $\frac{3}{4}$ de 20

② $\frac{2}{3}$ de 12 ⑤ $\frac{2}{5}$ de 10 ⑧ $\frac{2}{5}$ de 30 ⑪ $\frac{3}{4}$ de 24

③ $\frac{2}{3}$ de 15 ⑥ $\frac{2}{5}$ de 15 ⑨ $\frac{3}{4}$ de 12 ⑫ $\frac{3}{4}$ de 28

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Transforma cada fracción en otra equivalente pero con denominador positivo:

$$\frac{2}{-5} \quad \frac{8}{-3} \quad \frac{-6}{-11} \quad \frac{-4}{-9} \quad \frac{-5}{-3} \quad \frac{-6}{-7}$$

2. ¿Son equivalentes estas fracciones?

$$\frac{-3}{4} \text{ y } \frac{-6}{8}$$

Redúcelas a común denominador.

¿Qué ocurre cuando dos fracciones equivalentes se reducen a común denominador?

3. ¿Cuánto debe valer en cada caso el entero **x** para que las siguientes parejas de fracciones sean equivalentes?

a) $\frac{3}{-6}$ y $\frac{2}{\mathbf{x}}$ c) $\frac{-4}{-4}$ y $\frac{-3}{\mathbf{x}}$

b) $\frac{1}{4}$ y $\frac{\mathbf{x}}{8}$ d) $\frac{\mathbf{x}}{2}$ y $\frac{-6}{4}$

4. Reduce las fracciones $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ a común denominador $\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$.

5. En cada uno de los siguientes conjuntos de fracciones hay una fracción que no es equivalente a todas las demás. Di cuál.

$$\left\{\frac{-5}{6}, \frac{10}{-12}, \frac{-10}{12}, \frac{5}{6}, \frac{-15}{18}\right\}$$

$$\left\{\frac{-2}{3}, \frac{4}{-6}, \frac{-8}{12}, \frac{6}{-9}, \frac{12}{18}\right\}$$

$$\left\{\frac{-3}{-8}, \frac{-6}{-16}, \frac{6}{16}, \frac{-9}{-24}, \frac{-9}{24}, \frac{15}{40}\right\}$$

6. Escribe:

a) Una fracción equivalente a $\frac{-3}{5}$ que tenga por denominador 30.

b) Todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ cuyo denominador esté comprendido entre 9 y 21.

7. La relación entre los lados de una sala rectangular es $\frac{3}{4}$. Si el lado mayor mide 8 metros ¿cuánto mide el lado menor?

8. Los $\frac{7}{8}$ de un número son 126.

¿Cuál es el número?

9. Un chico se gasta las dos terceras partes de su dinero y aún le quedan 20 pesetas.

¿Cuánto dinero tenía?

10. Una persona, con los $\frac{2}{5}$ del dinero que lleva en el bolsillo, ha comprado un objeto que vale 2.000 ptas.

¿Cuánto dinero llevaba en el bolsillo?

11. Escribe todos los valores positivos que puedas dar a la letra **n** en $\frac{\mathbf{n}}{18}$ para que resulte una fracción irreducible con el numerador menor que el denominador.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Se calcula que de cada 29 habitantes de la Tierra, 6 son ciudadanos chinos. Si China tiene 994,383.000 habitantes ¿cuántos habitantes tiene la Tierra?

2. En 1981 entraron en España por las fronteras terrestres 28,600.000 viajeros, por las fronteras marítimas 1,400.000 viajeros y por los aeropuertos 10,000.000 de viajeros.

a) Determina la fracción del total de viajeros que entró por cada una de las fronteras.

b) De las siguientes frases, indica cuáles son ciertas, razonando las respuestas:

— Más de un tercio de los viajeros vinieron por avión.

— Más de un veinticincoavo de los viajeros llegaron en barco.

— De cada 600 viajeros, 429 llegaron por las fronteras terrestres y 21 llegaron por barco.

3. Una familia dispone de 105.126 ptas. de presupuesto mensual. De este presupuesto emplea $\frac{1}{3}$ en vivienda, $\frac{3}{7}$ en alimentación y el resto en vestido y varios. Una segunda familia, con el mismo presupuesto mensual, emplea 43.802 ptas. en vivienda, 30.036 ptas. en alimentación y el resto en vestido y varios. Determina:

a) La cantidad de dinero empleado por la primera familia en cada uno de los apartados.

b) La fracción del presupuesto que emplea la primera familia en vestido y varios.

c) La fracción del presupuesto que emplea la segunda familia en cada uno de los apartados.

4. En un colegio la distribución de niños por edades se ajusta a la tabla indicada. Calcula la fracción del total de niños que corresponde a cada una de las edades.

Años	Número de niños
6	124
7	150
8	144
9	132
10	110

5. En las elecciones locales celebradas en un pueblo, $\frac{3}{11}$ de los votos fueron para el partido A, $\frac{3}{10}$ de los votos fueron para el partido B, $\frac{5}{14}$ para el partido C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15.400. Calcula:

a) El número de votos obtenido por cada partido.

b) El número de abstenciones sabiendo que el número de votantes representa $\frac{5}{8}$ del censo electoral.

6. En una factoría, 2 de cada 7 empleados cobran mensualmente, 5 de cada 9 cobran cada 15 días y el resto cobra semanalmente.

El número de empleados es 1.638.

Determina el número de empleados de cada clase y la fracción del total que representa a los que cobran semanalmente.

7. Durante una semana, observando el número de asistentes a la función de tarde de un cine se obtuvieron los siguientes datos: el lunes asistieron 338 personas; el martes, 252, y el miércoles, 300. Por otra parte, el jueves se ocuparon $\frac{4}{9}$ del total de las butacas, el viernes se ocuparon $\frac{5}{12}$, el sábado, $\frac{12}{13}$ y el domingo asistieron 260 personas, lo que supone que estaban ocupados $\frac{5}{9}$ del total de butacas. Calcula:

a) El número de espectadores del jueves, del viernes y del sábado.

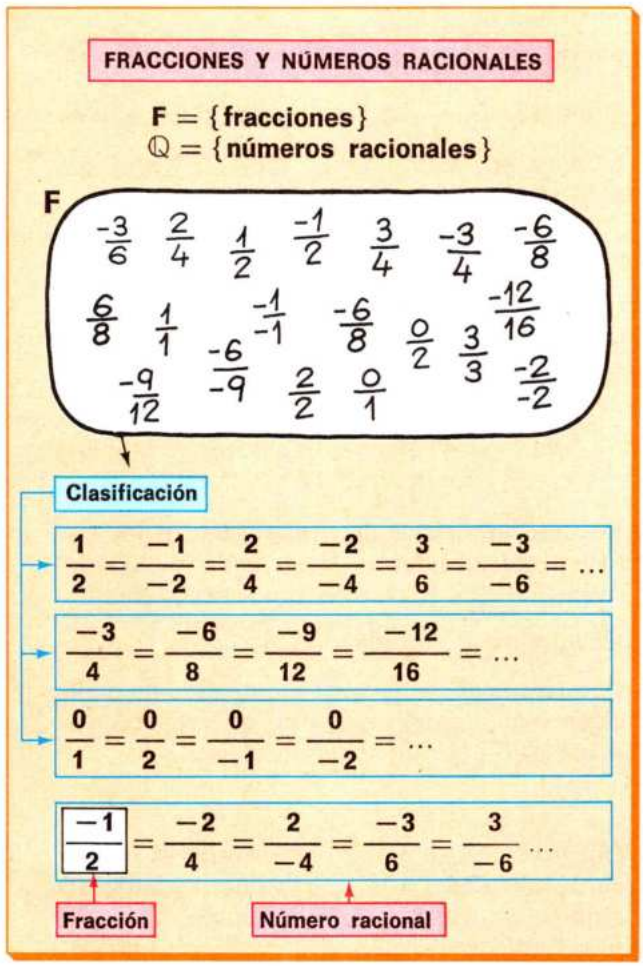
b) La fracción del total de butacas que se ocupó el lunes, el martes y el miércoles.

c) El total recaudado durante la semana, sabiendo que la entrada cuesta 175 pesetas, salvo el sábado y el domingo, en los que el precio se aumenta en $\frac{2}{7}$ del precio de los demás días.

TEMA 3 NÚMEROS RACIONALES

1. Número racional. I

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.



Si en el conjunto **F** de todas las fracciones agrupamos las fracciones que son equivalentes, el conjunto **F** queda descompuesto en subconjuntos o clases de fracciones equivalentes, es decir, el conjunto **F** queda clasificado.

Cada uno de estos subconjuntos o clases de fracciones equivalentes es un **número racional.**

La clase donde figura la fracción $\frac{1}{2}$, es decir, el número racional $\frac{1}{2}$, está formada por la fracción $\frac{1}{2}$ y todas sus equivalentes.

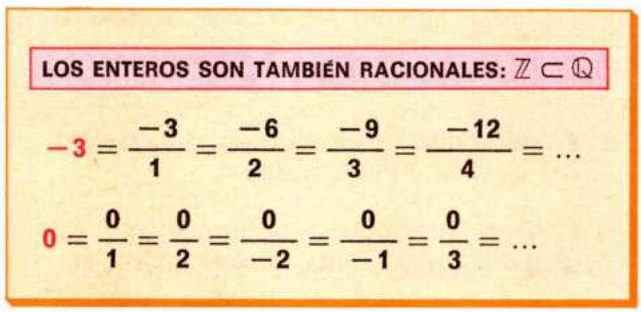
El número racional $\frac{-3}{4}$ está formado por la fracción $\frac{-3}{4}$ y todas sus equivalentes.

Cada una de las fracciones que forman un número racional es un **representante** de dicho número. Así, las fracciones $\frac{-3}{4}$, $\frac{-6}{8}$, $\frac{9}{-12}$ representan el mismo número racional.

El conjunto de los números racionales se designa por la letra $\mathbb{Q}$.

Un número racional está formado por una fracción y todas sus equivalentes.

El conjunto $\mathbb{Z}$ como subconjunto de $\mathbb{Q}$.



El número entero -3 se puede identificar con el número racional $\frac{-3}{1}$, es decir, $-3 = \frac{-3}{1}$

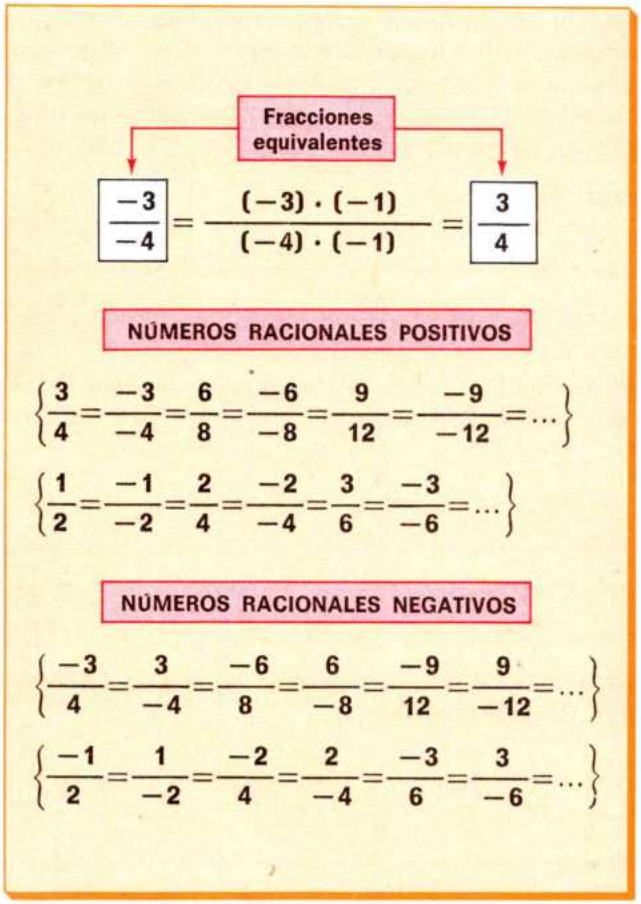
En general, si **a** es un número entero, se identifica con el número racional $\frac{a}{1}$, es decir, $a = \frac{a}{1}$

Por esta razón todos los números enteros son también números racionales.

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se identifica con el subconjunto de los números racionales de denominador 1.
El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un subconjunto del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

2. Número racional. II

Números racionales positivos y negativos.



El conjunto de los números racionales positivos se representa por $\mathbb{Q}^+$ y está formado por las fracciones que tienen los dos términos positivos.

Ahora bien, como toda fracción cuyos dos términos son números enteros negativos es equivalente a la misma fracción con los dos términos enteros positivos $\left(\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}\right)$, resulta:

a) **Que los números racionales positivos son los que tienen representantes con el mismo signo en el numerador y en el denominador.**

b) **Que, por el contrario, los números racionales negativos tienen representantes con diferente signo en el numerador y en el denominador.**

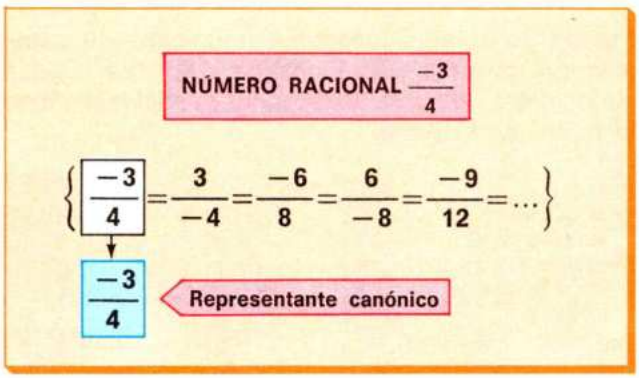
El conjunto de los números racionales negativos se designa por la letra $\mathbb{Q}^-$.

El número racional cero (0) está formado por todas las fracciones que tienen el numerador igual a cero.

Un número racional es necesariamente o positivo, o negativo o cero, y por tanto pertenecerá a uno de los conjuntos $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ o será el 0; luego

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$

Representante canónico.



Hemos definido un número racional como una fracción y todas sus equivalentes, es decir, como un conjunto infinito de fracciones equivalentes.

Para designar uno de esos conjuntos, es decir, para designar un número racional, lo que se hace es escribir cualquiera de las fracciones de ese conjunto como representante del número.

Lo más frecuente es elegir como representante la fracción irreducible de denominador positivo; esta fracción se llama **representante canónico** del número racional dado.

1. Multiplica todos los términos de la fracción inicial por el mismo número y escribe así cuatro representantes de cada número racional.

a) $\left\{\frac{-1}{2}, \text{——}, \text{——}, \text{——}, \text{——}\right\}$

b) $\left\{\frac{-2}{5}, \text{——}, \text{——}, \text{——}, \text{——}\right\}$

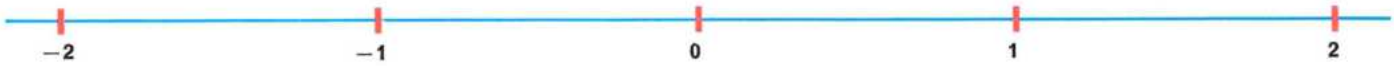
c) $\left\{\frac{1}{6}, \text{——}, \text{——}, \text{——}, \text{——}\right\}$

3. Representación gráfica de números racionales. I

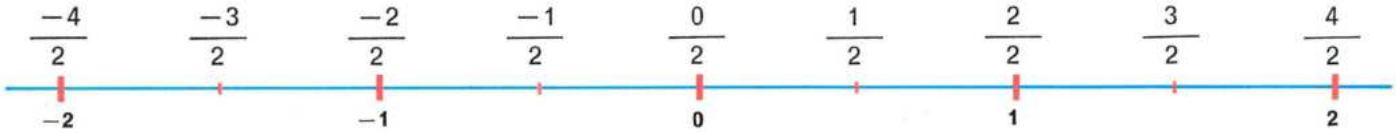
Representación en la recta numérica.

① Si sobre una recta **r** se señala un punto fijo 0, que representa el número cero, y llevamos a la derecha y a la izquierda del punto 0 un segmento unidad $\overset{u}{\longleftrightarrow}$, resulta una serie de puntos sobre la recta. Los puntos señalados en la recta representan los números enteros: los positivos a la derecha del punto 0 y los negativos a la izquierda.

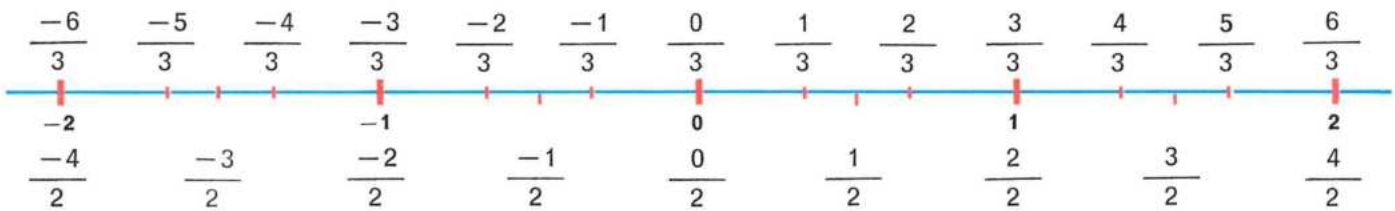
Observa una parte de esta recta:



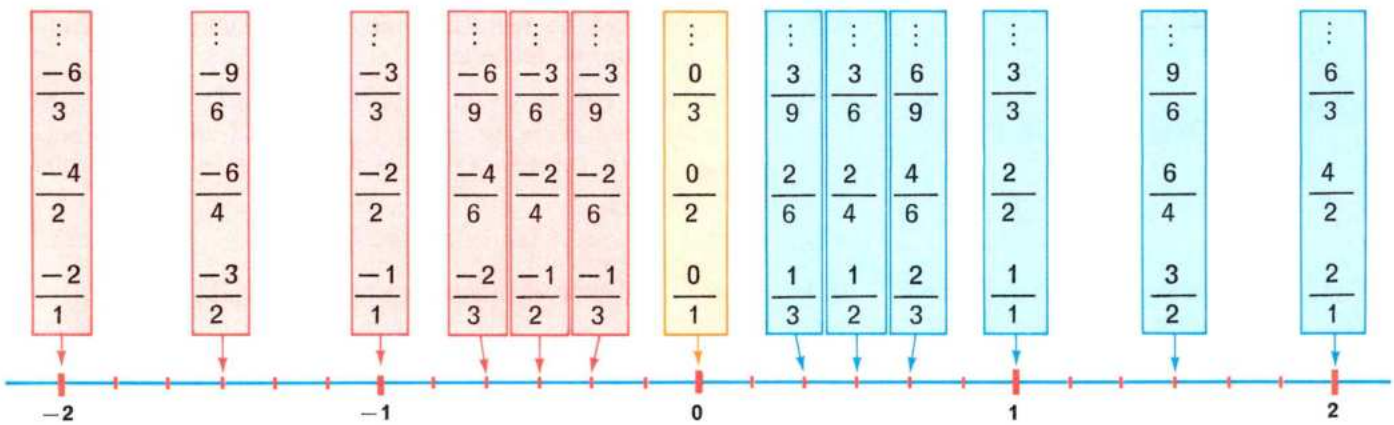
② Si cada segmento unidad se divide en dos partes iguales, quedan representadas las fracciones de denominador 2:



③ Si cada segmento unidad se divide en tres partes iguales, quedan representadas las fracciones de denominador 3:



④ Si se continúa representando del mismo modo las fracciones de denominadores 4, 5, 6, ... se observa que las fracciones equivalentes quedan representadas por el mismo punto. Por eso cada número racional viene representado por un solo punto de la recta.

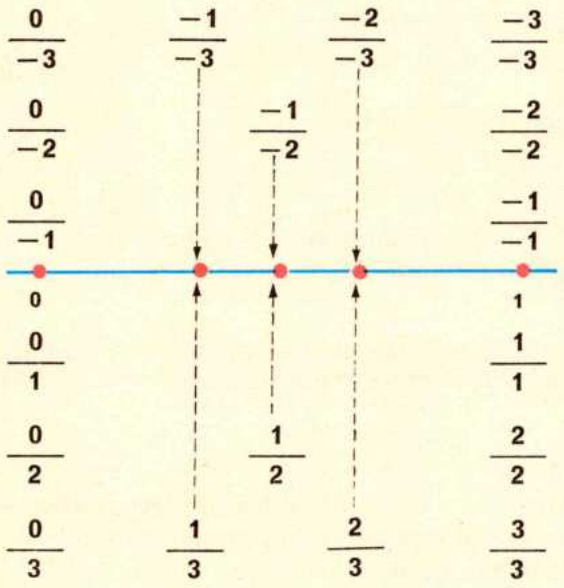


Cada número racional viene representado por un solo punto de la recta.

4. Representación gráfica de números racionales. II

Representación de las fracciones de denominador negativo.

ALGUNAS FRACCIONES ENTRE CERO (0) Y UNO (1)



Ya vimos en el tema anterior que para cada fracción de denominador negativo existe otra fracción equivalente con el denominador positivo.

Así, las fracciones $\frac{-2}{-3}$, $\frac{1}{-2}$, $\frac{0}{-3}$, $\frac{-5}{-6}$ son equivalentes a las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{5}{6}$, respectivamente.

Por esta razón las fracciones de denominador negativo están representadas en la recta numérica por el mismo punto que sus equivalentes de denominador positivo.

Observa algunas fracciones de denominador negativo representadas entre 0 y 1.

Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

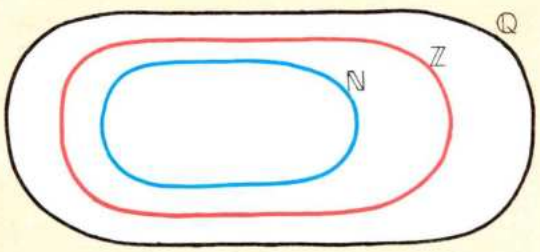
LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N} = \{\textbf{naturales}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\textbf{enteros}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{\textbf{racionales}\} =$

$$= \left\{\ldots, -2, \frac{-3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\right\}$$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Ya sabes que los números naturales se pueden identificar con los números enteros positivos.

Esto significa que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Como los números enteros se pueden identificar con los números racionales de denominador 1, $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{1}$, resulta que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Ejemplos

- El número natural 5 se identifica con el entero positivo $+5$.
- El número natural 5 se identifica también con el número racional positivo $\frac{5}{1}$
- El número entero negativo -5 se identifica con el número racional $\frac{-5}{1}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. De las siguientes parejas de fracciones, di cuáles están representadas por el mismo punto sobre la recta:

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$

b) $\frac{-1}{3}$ y $\frac{1}{-3}$

c) $\frac{4}{-2}$ y $\frac{-6}{3}$

d) $\frac{0}{4}$ y $\frac{0}{-4}$

e) $\frac{-11}{3}$ y $\frac{-33}{9}$

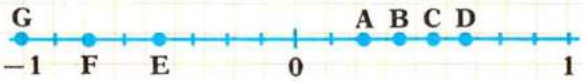
f) $\frac{-4}{-3}$ y $\frac{4}{3}$

2. Representa gráficamente sobre una recta las siguientes fracciones:

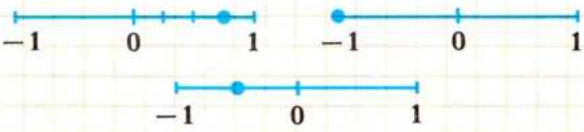
$$\frac{1}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{0}{4}, \frac{-8}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{-3}{4}$$

3. Sobre la recta se han señalado los puntos **A, B, C, D, E, F** y **G.**

Escribe a qué números racionales corresponden.



4. Escribe tres fracciones que se representen en cada uno de los puntos de los siguientes gráficos:

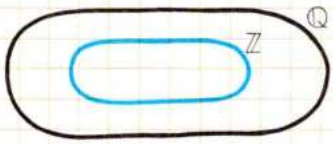


5. Contesta:

a) ¿Es $\frac{4}{5}$ un número natural? ¿Es racional?

b) ¿Es -7 un número natural? ¿Es entero? ¿Es racional?

c) Ana afirma que este diagrama



significa que «todo número entero es también número racional».

Justifica la afirmación de Ana.

6. Escribe ocho fracciones que pertenezcan a cada uno de los números racionales siguientes:

a) $\frac{-1}{3}$

b) $\frac{-2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{3}$

f) $\frac{-1}{4}$

7. Dadas las fracciones

$$\frac{-18}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{-1}, \frac{0}{5}, \frac{5}{4}, \frac{0}{-3}, \frac{-4}{2}$$

di cuáles de ellas tienen como punto representativo el de un entero.

8. Escribe seis fracciones representativas de cada uno de los enteros siguientes:

$2, -3, -1, 0, 4, -2$

9. Si **x** es un número entero positivo, indica las fracciones que representan un número racional negativo:

$$\frac{x}{3}, \frac{-x}{3}, \frac{x}{2}, \frac{3x}{3}, \frac{-2}{x}, \frac{x+2}{x}, \frac{-5}{-x}$$

10. Escribe y contesta:

a) Cuatro fracciones que tenga por denominador -3.

b) Cuatro fracciones que tengan por numerador 0.

c) Cuatro fracciones que tengan iguales el numerador y el denominador.

d) Cuatro fracciones que tengan por denominador el opuesto del numerador.

e) ¿Hay alguna fracción que tenga por denominador 0?

11. En cada uno de los siguientes conjuntos hay una fracción que no es equivalente a todas las demás. Di cuál.

a) $\left\{\frac{-5}{6}, \frac{15}{-18}, \frac{10}{12}, \frac{20}{-24}\right\}$

b) $\left\{\frac{-6}{-8}, \frac{9}{12}, \frac{-18}{-24}, \frac{-27}{-45}\right\}$

c) $\left\{\frac{2}{6}, \frac{-6}{-12}, \frac{8}{24}, \frac{-10}{-30}\right\}$

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

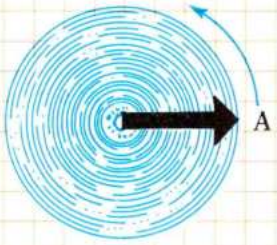
1. La velocidad de la luz es de 3×10^8 metros por segundo.

a) ¿Cuántos kilómetros recorre la luz en $\frac{10}{3}$ horas?

b) ¿Cuánto tiempo emplea la luz en recorrer 3 millones de kilómetros?

c) Si la distancia entre dos estrellas es 108.10^{18} kilómetros, ¿cuánto tarda la luz en llegar de una a otra estrella?

2. Observa el disco de la figura y dibújalo en tu cuaderno. La flecha negra gira con sentido positivo si lo hace en el sentido de la flecha azul y gira con sentido negativo en caso contrario. Con la ayuda de un compás indica, en cada caso, la posición de la punta de flecha en cada caso si, partiendo siempre del punto A, se le aplica:



a) $\frac{3}{4}$ de vuelta.

b) $\frac{-7}{8}$ de vuelta.

c) -3 vueltas.

d) $\frac{-25}{5}$ de vuelta.

e) $\frac{-1}{4}$ de vuelta.

f) $\frac{-15}{2}$ de vuelta.

g) $\frac{24}{4}$ de vuelta.

h) $\frac{25}{-2}$ de vuelta.

3. Determina en cada caso cuánto se tarda en llenar dos tanques de agua, uno de 12 litros y otro de 35 litros, si se utiliza un grifo que echa por segundo:

a) Un cuarto de litro.

b) Medio litro.

c) $\frac{1}{3}$ de litro.

d) $\frac{1}{6}$ de litro.

e) Dos litros.

f) Cinco litros.

4. Un vendedor ambulante dispone de pesas de $\frac{1}{2}$ kilo, de $\frac{1}{4}$ de kilo, de $\frac{1}{5}$ de kilo y de $\frac{1}{10}$ de kilo.

Determina en cada caso el número de pesas necesarias para equilibrar 17 kg, 15 kg, 8 kg, 40 kg y 27 kg si se utilizan sólo pesas de una clase.

5. Si la densidad de una sustancia es $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ g/cm³ quiere decir que **a** gramos de esa sustancia ocupan un volumen de **b** cm³. La densidad de una sustancia **x** es $\frac{3}{5}$ g/cm³, y la densidad de una sustancia **y** es $\frac{3}{7}$ g/cm³.

a) Determina el volumen ocupado, respectivamente, por 9 g, 12 g, 21 g y 153 g de cada una de las sustancias.

b) Determina la masa respectiva de un volumen de 35 cm³, 70 cm³, 700 cm³ y 280 cm³ de cada una de las sustancias.

6. Al lavar por primera vez una pieza de tela de algodón de 24 m de larga ha encogido 2 m a lo largo.

a) ¿Cuánto encogerá una pieza de 36 m de la misma tela? ¿Y de 36 cm de largo?

b) ¿Cuál es la longitud de la pieza que al lavarla encoge 3 m? ¿Cuál es la longitud de la pieza que al lavarla encoge 1 m? ¿Y la que al lavarla encoge 4 cm?

7. En unos almacenes se han rebajado todos los artículos en una quinta parte de su precio.

a) Indica cuál es la rebaja sufrida por los artículos que costaban, respectivamente: 5 ptas., 10 ptas., 45 ptas., 450 ptas., 45.000 ptas., 100.000 ptas. y 230 ptas.

b) Indica cuál era el precio de los artículos a los que se les aplica, respectivamente, una rebaja de: 3 ptas., 514 ptas., 63 ptas., 129 ptas., 12.542 ptas.

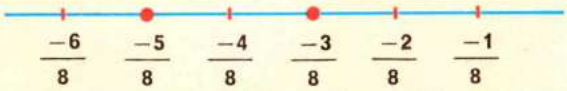
TEMA 4 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

1. Ordenación de números racionales

Comparación de números racionales.

COMPARACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

a) **Comparación de $\frac{-3}{8}$ y $\frac{-5}{8}$**

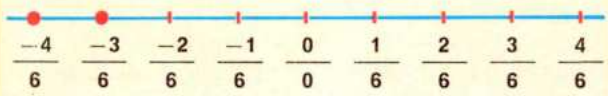


$\frac{-3}{8} > \frac{-5}{8}$

porque $\frac{-3}{8}$ está más a la derecha que $\frac{-5}{8}$

b) **Comparación de $\frac{-1}{2}$ y $\frac{-2}{3}$**

Se comparan $\frac{-3}{6}$ y $\frac{-4}{6}$



$\frac{-3}{6} > \frac{-4}{6}$

porque $\frac{-3}{6}$ está más a la derecha que $\frac{-4}{6}$

a) **Cuando las fracciones representantes tienen el mismo denominador.**

Sea el siguiente par de números racionales:

$$\frac{-3}{8} \text{ y } \frac{-5}{8}$$

Este par está representado por fracciones del mismo denominador. Es fácil comparar este par de fracciones en la recta numérica.

El criterio de comparación de números racionales en la recta numérica es el mismo que el estudiado para los números enteros.

De dos números racionales cualesquiera es mayor aquel que al representarlo en la recta numérica queda más a la derecha.

Observa que en las fracciones del mismo denominador lo que comparamos son sus numeradores.

b) **Cuando las fracciones representantes tienen distinto denominador.**

Si dos números racionales están representados por fracciones de distinto denominador, como $\frac{-1}{2}$ y $\frac{-2}{3}$, para compararlas primero se reducen a común denominador: $\frac{-3}{6}$ y $\frac{-4}{6}$

En la recta numérica se observa que $\frac{-3}{6}$ está a la derecha de $\frac{-4}{6}$; luego: $\frac{-1}{2} > \frac{-2}{3}$

Para comparar dos números racionales se toma un representante de cada uno con el mismo denominador positivo y se comparan los numeradores.

1. Indica en cada caso el número racional mayor:

a) $\frac{-3}{4}$ ó $\frac{-5}{6}$ b) $\frac{-3}{2}$ ó $\frac{1}{4}$ c) $\frac{-5}{6}$ ó $\frac{10}{-12}$ d) $\frac{1}{6}$ ó $\frac{-1}{4}$

2. Escribe cuatro números racionales distintos:

a) Que sean mayores que $\frac{1}{4}$

b) Que sean menores que $\frac{1}{2}$

c) Que sean mayores que -2 y sean negativos.

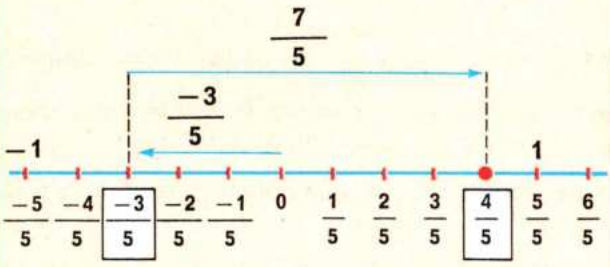
d) Que sean mayores que -1 y sean negativos.

2. Suma de números racionales

SUMA DE NÚMEROS RACIONALES REPRESENTADOS POR FRACCIONES DEL MISMO DENOMINADOR

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{-3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{-3+7}{5} = \frac{4}{5}$

Representación gráfica de la suma $\frac{-3}{5} + \frac{7}{5}$



SUMA DE NÚMEROS RACIONALES REPRESENTADOS POR FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR

a) **Método de los productos cruzados**

- $\frac{3}{8} + \frac{-7}{6} = \frac{18}{48} + \frac{-56}{48} = \frac{-38}{48}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

b) **Método del m.c.m.**

m.c.m. (6,8) = 24

$$\frac{3}{8} + \frac{-7}{6} = \frac{9}{24} + \frac{-28}{24} = \frac{-19}{24}$$

Casos que se dan en la suma de números racionales.

PRIMER CASO

Cuando los números racionales están representados por fracciones del mismo denominador.

En este caso se suman los numeradores de las fracciones y se deja el mismo denominador:

$$\frac{-3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{-3+7}{5} = \frac{4}{5}$$

En general, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

En la figura se ha representado la suma de números racionales así: «Los racionales positivos con un movimiento a la derecha y los negativos con un movimiento a la izquierda». El primer sumando parte de cero.

SEGUNDO CASO

Cuando los números racionales están representados por fracciones de distinto denominador.

En este caso se cambian las fracciones dadas por otras equivalentes a ellas pero que tengan el mismo denominador.

Este cambio es lo que se llama **reducción a común denominador.**

Observa dos formas de hacer esta suma: $\frac{3}{8} + \frac{-7}{6}$,

a) **por el método de los productos cruzados**

b) **por el método del mínimo común múltiplo.**

Observa que las fracciones obtenidas por los dos métodos son equivalentes: $\frac{-38}{48} = \frac{-19}{24}$

Si uno de los números racionales es un entero se escribe este entero en forma de fracción $\frac{a}{1}$:

$$3 + \frac{5}{6} = \frac{3}{1} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{1 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6} = \frac{23}{6}$$

Para sumar dos números racionales se toma de cada uno un representante con el mismo denominador y después se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

1. **Haz las siguientes sumas:**

a) $\frac{3}{4} + \frac{-4}{3}$ c) $\frac{-3}{5} + \frac{2}{7}$ e) $\frac{-3}{4} + \frac{1}{6}$ g) $\frac{-1}{8} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{-5}{7} + \frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{8} + \frac{-7}{10}$ f) $\frac{5}{6} + \frac{-7}{12}$ h) $\frac{-3}{8} + \frac{7}{4}$

3. Propiedades de la suma de números racionales. I

Propiedad conmutativa.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\frac{-1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}+\frac{-1}{3}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Haz las siguientes sumas y comprueba que en las dos se obtiene el mismo resultado:

$$\frac{-1}{3}+\frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \frac{5}{3}+\frac{-1}{3}$$

En las dos se obtiene el mismo resultado: $\frac{4}{3}$

En general, la **suma de dos números racionales cualesquiera no depende del orden de los sumandos:**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Propiedad asociativa.

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{-3}{2}\right)+\frac{1}{3}=\frac{3}{5}+\left(\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

Primer miembro — Segundo miembro

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{m}{h}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{m}{h}\right)$$

La suma $\frac{3}{5}+\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}$ se puede hacer sumando en primer lugar las dos primeras fracciones o sumando en primer lugar las dos últimas fracciones.

La suma de varios números racionales no depende de la forma en que se asocien.

Comprueba operando en los dos miembros que se obtiene el mismo resultado: $\frac{-17}{30}$

Las propiedades asociativa y conmutativa permiten escribir sumas de varios números sin utilizar paréntesis:

$$\frac{3}{5}+\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}$$

Elemento neutro.

ELEMENTO NEUTRO

$$0+\frac{2}{3}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3}=\frac{0+2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$0+\frac{a}{b}=\frac{0}{b}+\frac{a}{b}=\frac{0+a}{b}=\frac{a}{b}$$

El número racional 0 es el elemento neutro de la suma porque sumándole cualquier número racional da el mismo número racional.

Ejemplo $0+\frac{2}{3}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3}=\frac{0+2}{3}=\frac{2}{3}$

En general: $\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$

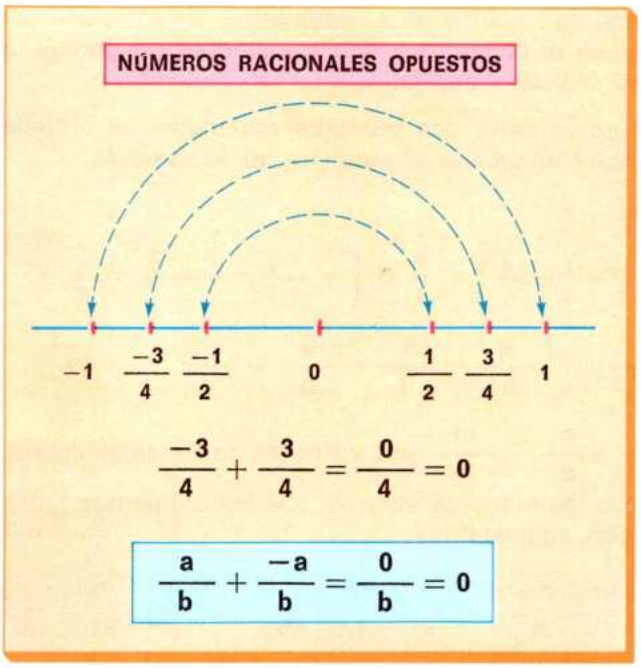
1. Calcula:

a) $\frac{-2}{3}+\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{5}+0$ e) $\frac{5}{3}+\frac{0}{1}$ g) $\frac{-x}{b}+\frac{x}{b}$

b) $\frac{4}{5}+\frac{-2}{3}$ d) $\frac{-4}{5}+\frac{4}{5}$ f) $\frac{0}{1}+\frac{8}{3}$ h) $\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}$

4. Propiedades de la suma de números racionales. II

Elemento opuesto o simétrico.



Dado un número racional cualquiera, siempre se puede encontrar otro número que sumado con él dé el número 0.

Así, dado $\frac{1}{2}$, hay otro número $\frac{-1}{2}$ tal que:

$$\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

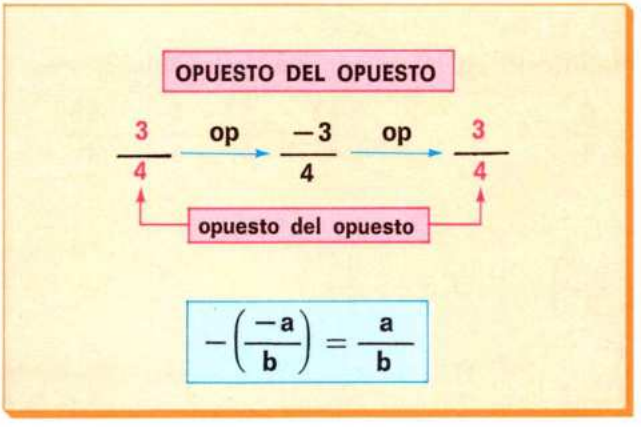
Se dice que los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{-1}{2}$ son números racionales **opuestos** o números racionales **simétricos.**

El opuesto de un número racional $\frac{a}{b}$ se representa por $\text{op}\left(\frac{a}{b}\right)$, o bien por $\frac{-a}{b}$, y se verifica que sumados dan cero:

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

Observa que para hallar el opuesto de un número racional basta con cambiarle el signo.

Propiedades de los opuestos.



1. Opuesto del opuesto de un número racional.

En el esquema se observa que el opuesto del opuesto de $\frac{3}{4}$ es $\frac{3}{4}$

Se escribe $\text{op}(\text{op}\left(\frac{3}{4}\right)) = \frac{3}{4}$, o también:

$$-\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

En general, ocurre como con los números enteros.

El opuesto del opuesto de un número racional es el mismo número racional.

2. Opuesto de una suma de números racionales.

Observa esta suma: $\frac{-1}{4} + 6 - \frac{2}{3} + \frac{5}{4}$

Si se cambia el signo de cada sumando se obtiene otra suma: $\frac{1}{4} - 6 + \frac{2}{3} - \frac{5}{4}$

Esta segunda suma es la opuesta de la primera, ya que la suma de ambas es cero.

Observa cómo aplicando las propiedades asociativa y conmutativa se obtiene cero.

El opuesto de una suma de números racionales se obtiene cambiando de signo a cada uno de los sumandos.

5. Resta de números racionales. Equivalencias fundamentales

RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

Resta de números racionales → **Suma del opuesto del sustraendo**

- $\left(+\frac{5}{4}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)$
- $\left(\frac{-3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{5} + \left(+\frac{1}{2}\right)$

Resta de números racionales.

Lo mismo que ocurre en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales la resta se reduce a una suma.

La diferencia entre **dos números racionales se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.**

Ejemplo

$$\left(+\frac{5}{4}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4}$$

En general: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$

Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{h}$ son números racionales, ocurre, como con los números enteros, que las siguientes igualdades son equivalentes:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{m}{h} \leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{m}{h} - \frac{a}{b} \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{h} - \frac{c}{d}$$

Para restar dos números racionales se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

1. Contesta:

¿Qué propiedades de la suma se ponen de manifiesto en las siguientes igualdades?

a) $\frac{-7}{5} + \frac{0}{5} = \frac{-7}{5}$ b) $\frac{-5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{0}{3} = 0$ c) $\frac{-3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} + \frac{-3}{4}$

2. Calcula:

a) $1 - \left(\frac{-6}{5}\right) = 1 + \frac{6}{5}$ c) $\frac{-7}{9} - \left(\frac{-9}{9}\right)$ e) $3 + \frac{1}{3}$

b) $\frac{9}{4} - \left(\frac{-5}{4}\right)$ d) $-3 - \frac{1}{4}$ f) $2 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}$

3. Calcula:

a) $\frac{7}{8} + \frac{-1}{8}$ b) $\frac{-38}{12} + \frac{-4}{12}$ c) $\frac{-3}{4} - \left(\frac{-5}{6}\right)$

4. Escribe en cada $\square$ el número conveniente para que la igualdad sea cierta:

a) $\frac{\square}{4} + \frac{3}{4} = 2$ b) $\frac{\square}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ c) $\frac{\square}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

5. Sabiendo que x representa un número entero, expresa en una sola fracción cada una de las expresiones siguientes:

a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3}$ b) $\frac{x+1}{6} - \frac{x}{3}$ c) $\frac{3x}{16} - \frac{x}{12}$ d) $\frac{x-1}{6} - \frac{x-2}{3}$

6. Sumas y restas combinadas. Supresión de paréntesis

Escritura simplificada de sumas de números racionales.

Recuerda que:

- Un número racional positivo

Se escribe así	En la práctica se escribe así
$\frac{+3}{+5}, \frac{-5}{-6}, \frac{+8}{9}$	$\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}$

- Un número racional negativo

Se escribe así	En la práctica se escribe así
$\frac{-3}{7}, \frac{4}{-5}$	$-\frac{3}{7}, -\frac{4}{5}$

- Como ocurre con la suma de los números enteros, la suma de números racionales se escribe generalmente prescindiendo de los paréntesis de los sumandos y de los signos de sumar.

Así, la suma

$$\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+(-2)+\left(+\frac{1}{4}\right)$$

se escribe generalmente así:

$$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{4}$$

Observa cómo se realiza esta última suma:

1. Se suman los números que llevan signo $+$.
2. Se suman los números que llevan signo $-$.
3. Se resta el segundo resultado del primero:

$$\frac{3}{4}-\frac{7}{2}=\frac{3}{4}-\frac{14}{4}=-\frac{11}{4}$$

ESCRITURA SIMPLIFICADA DE SUMAS DE NÚMEROS RACIONALES

Esta suma $\left(\frac{-3}{2}\right)+\left(\frac{+1}{2}\right)+(-2)+\left(\frac{+1}{4}\right)$

Se escribe así $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{4}$

FORMA PRÁCTICA DE CALCULAR LA SUMA

$$\frac{-3}{2}+\frac{1}{2}-2+\frac{1}{4}$$

① **Suma de sumandos positivos**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

② **Suma de sumandos negativos**

$$\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$

③ **Resta de resultados**

$$\frac{3}{4}-\frac{7}{2}=\frac{3}{4}-\frac{14}{4}=-\frac{11}{4}$$

Supresión de paréntesis.

a) Cuando el paréntesis va precedido del signo menos (−) se puede eliminar el paréntesis cambiando todos los signos del interior del paréntesis.

Observa esta resta:

$$3-\left(-\frac{1}{4}+5-\frac{3}{4}\right)$$

Para hacer esta resta y eliminar el paréntesis hay que sumar al minuendo 3 el opuesto del sustraendo, que es:

$$-\left(-\frac{1}{4}+5-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}-5+\frac{3}{4}$$

Finalmente queda $4-5=-1$.

b) Cuando el paréntesis va precedido del signo más (+) se elimina el paréntesis sin cambiar ningún signo.

Minuendo: 3 — Sustraendo: $\left(-\frac{1}{4}+5-\frac{3}{4}\right)$

Minuendo: 3 + Opuesto del sustraendo: $\frac{1}{4}-5+\frac{3}{4}$

Positivos: $3+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=3+1=4$

Negativos: -5

Resultado: $4-5=-1$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ ② $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$ ⑤ $1-\frac{1}{2}$ ⑥ $1-\frac{1}{5}$ ⑦ $1+\frac{1}{4}$ ⑧ $2+\frac{1}{3}$

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Recuerda que en un cuadro mágico la suma de los números de cada fila es igual a la suma de los números de cada columna e igual a la suma de los números de cada diagonal.

Completa los números que faltan y comprueba que es un cuadro mágico.

10		16/3	9
	25/3	8	
	7		26/3
6			5

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula:

a) $\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+3-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}+3-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)$

c) $\frac{3}{4}-\left(+\frac{5}{6}\right)$

d) $1-\left(-\frac{3}{4}\right)$

e) $2-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

2. Escribe el número que falta en cada $\square$ para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\frac{5}{2}=\frac{\square}{2}+\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{3}+\frac{\square}{3}=\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{5}+\frac{\square}{5}=2$

3. Calcula:

a) $\frac{7}{3}+\frac{-5}{6}+\frac{13}{15}$

b) $\frac{x}{5}+\frac{x-1}{2}$

c) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$

d) $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{2}$

e) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}$

f) $\frac{x+1}{2}-x$

4. En el conjunto $\mathbb{Q}$, la suma verifica las propiedades:

a) asociativa;

b) conmutativa;

c) tiene elemento neutro $\frac{0}{1}$;

d) todo número racional tiene un opuesto.

Por cumplir estas propiedades se dice que el conjunto $\mathbb{Q}$ con la operación adición es **un grupo abeliano.** Escribe estas propiedades.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. En 1980, del total de energía eléctrica producida en España $\frac{31}{110}$ provinieron de centrales hidráulicas, $\frac{1}{22}$ de centrales nucleares y el resto de centrales térmicas convencionales.

a) ¿Qué fracción del total producido provino de las centrales térmicas convencionales?

b) ¿Qué fracción del total producido provino de centrales no nucleares?

2. Los $\frac{2}{5}$ de los ingresos de una comunidad de vecinos se emplean en combustible, $\frac{1}{8}$ se emplea en electricidad, $\frac{1}{12}$ en la recogida de basuras, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento del edificio y el resto se emplea en limpieza.

a) ¿Qué fracción de los ingresos se emplea en limpieza?

b) De acuerdo con la fracción de ingresos empleada, ordena las partidas enumeradas de menor a mayor.

3. A Juan le subieron el sueldo en 250.000 pesetas anuales. Antes de la subida, Juan pagaba $\frac{1}{12}$ de sueldo anual a la Seguridad Social y $\frac{5}{24}$ de impuestos. Después de la subida, Juan paga $\frac{1}{11}$ de su sueldo anual a la Seguridad Social y $\frac{7}{24}$ de impuestos.

a) ¿Cuál es la fracción de sueldo libre de impuestos y Seguridad Social antes y después de la subida?

b) Si el sueldo anual de Juan antes de la subida era de 1¡500.000 ptas. ¿le compensa la subida?

¿Y .si era de 3¡000.000 de ptas.?

4. En una ciudad se calcula que $\frac{1}{15}$ de sus habitantes utilizan el autobús cuatro veces al día, $\frac{1}{10}$ lo utiliza tres veces al día, $\frac{3}{7}$ dos veces al día, $\frac{1}{8}$ una vez al día y el resto no lo utiliza habitualmente.

a) Determina la fracción del total de habitantes que utiliza el autobús.

b) Si la ciudad tiene 252.000 habitantes ¿qué número de viajeros diarios transportan los autobuses?

c) El billete de autobús vale 27 ptas. comprado por unidad y un tercio más barato si se compra en bonobús.
Determina el importe diario de todos los billetes si aproximadamente 4 de cada 5 viajeros utilizan bonobús.

5. Una compañía de teatro paga $\frac{2}{15}$ de sus ingresos a su agente comercial, $\frac{1}{6}$ de sus ingresos a su agente artístico y $\frac{1}{12}$ a su agente musical. En el verano del 82 el agente comercial percibió 750.000 ptas., y en el verano del 83, y una vez pagados los agentes, la compañía dispuso de 9 millones de pesetas.

Determina la fracción de sus ingresos que la compañía paga a los agentes y lo que obtuvo cada uno de ellos en los veranos del 82 y del 83.

6. Para conseguir una calidad de café un envasador mezcla $\frac{3}{8}$ de kilo de café colombiano de 352 ptas. el kilo, $\frac{2}{5}$ de kilo de café brasileño de 325 ptas. el kilo, $\frac{1}{2}$ kg de café canario de 260 ptas. el kilo y el resto, hasta 2 kg, de café venezolano a 240 ptas. el kilo.

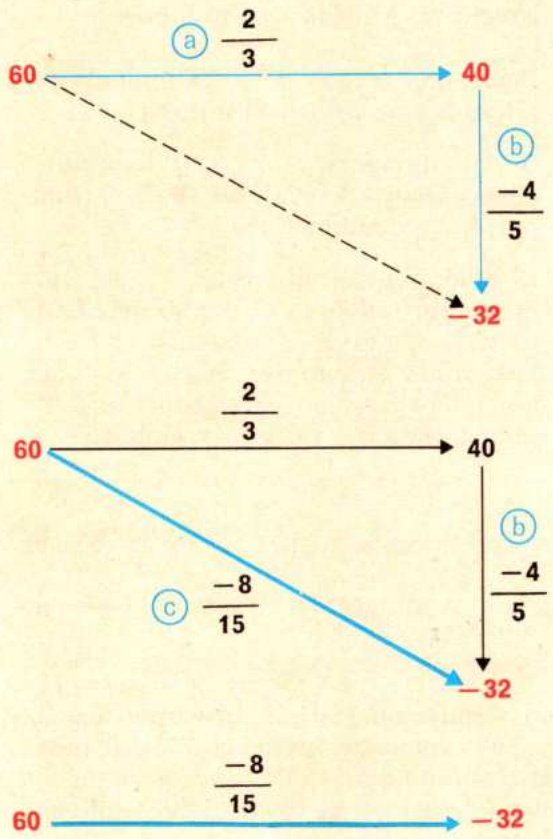
Determina los beneficios que consigue el envasador si vende el kilo de la mezcla a 620 ptas. el kilo.

TEMA 5 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

1. Producto de números racionales

Cómo se multiplican números racionales.

PRODUCTO DE NÚMEROS RACIONALES



$$\frac{2}{3}\cdot\frac{-4}{5}=\frac{2\cdot(-4)}{3\cdot 5}=\frac{-8}{15}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Sean los números racionales $\frac{2}{3}$ y $\frac{-4}{5}$

(a) La fracción $\frac{2}{3}$, al actuar sobre cualquier número, primero multiplica por 2 y después divide por 3.

Así, mediante la fracción $\frac{2}{3}$ el número 60 se transforma en el número 40.

(b) La fracción $\frac{-4}{5}$, al actuar sobre cualquier número, primero multiplica por -4 y después divide por 5.

Así, mediante la fracción $\frac{-4}{5}$ el número 40 se transforma en -32.

(c) El producto de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{-4}{5}$ se puede interpretar como la aplicación sucesiva de las dos fracciones, que transforma el número 60 en -32.

Multiplicar por 2 y dividir por 3 $\left(\frac{2}{3}\right)$, y multiplicar por -4 y dividir por 5 $\left(\frac{-4}{5}\right)$ es equivalente a multiplicar por 2 y por -4 y dividir por 3 y por 5 $\left(\frac{2\cdot(-4)}{3\cdot 5}\right)$

Por eso el producto de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{-4}{5}$ se puede definir así:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{-4}{5}=\frac{2\cdot(-4)}{3\cdot 5}$$

En general:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Para multiplicar dos números racionales se toma un representante cualquiera de cada uno y se escribe como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

1. Efectúa los siguientes productos:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{5}$ b) $\frac{-5}{3}\cdot\frac{6}{7}$ c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{-20}{60}$ d) $\frac{3}{20}\cdot\frac{-5}{15}$

2. Propiedades del producto de números racionales

Propiedad conmutativa del producto.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\frac{-2}{3}\cdot\frac{9}{14}=\frac{9}{14}\cdot\frac{-2}{3}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

Observa que al cambiar el orden de los factores de la multiplicación $\frac{-2}{3}\cdot\frac{9}{14}$ se obtiene el mismo producto:

$$\frac{-2}{3}\cdot\frac{9}{14}=\frac{-2\cdot 9}{3\cdot 14}=\frac{-3}{7}$$

$$\frac{9}{14}\cdot\frac{-2}{3}=\frac{9\cdot(-2)}{14\cdot 3}=\frac{-3}{7}$$

Propiedad asociativa del producto.

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{f}{g}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{g}\right)$$

El producto de varios números racionales, por ejemplo $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{-3}{5}$, no depende de la forma en que se asocien:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}=\frac{3}{8}\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-9}{40}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-9}{20}=\frac{-9}{40}$$

Elemento neutro o unidad.

ELEMENTO NEUTRO O UNIDAD

$$\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

El elemento neutro del producto de números racionales es el 1. El número racional 1 está formado por todas las fracciones que tienen el numerador y el denominador iguales.

$$1\rightarrow\left\{\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{2}{2}=\frac{-2}{-2}=\frac{3}{3}=\frac{-3}{-3}=\frac{4}{4}=\ldots\right\}$$

Observa que al multiplicar el 1 por cualquier número racional da el mismo número racional.

Elementos inversos.

ELEMENTOS INVERSOS

El inverso de $\frac{-3}{4}$ es $\frac{4}{-3}$, porque:

$$\frac{-3}{4}\cdot\frac{4}{-3}=\frac{-12}{-12}=\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

Todo número racional distinto de cero tiene inverso, es decir, si en el número racional $\frac{a}{b}$ es **a** distinto de cero ($a\neq 0$), entonces existe un número racional $\frac{b}{a}$ tal que multiplicado por él da el elemento neutro 1:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=\frac{1}{1}=1$$

En ocasiones se designa un número racional por una sola letra. En este caso, si **m** es un número racional distinto de cero, su inverso se representa por $\frac{1}{m}$

3. Propiedad distributiva. Sacar factor común

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Ejemplo $6 \cdot (5 + 7) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7$

La propiedad distributiva relaciona la multiplicación y la suma.

Ya sabes que esta propiedad se cumple con números naturales y con números enteros. Ahora vamos a comprobar que también se cumple con números racionales:

$$\frac{-2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{10}$$

DESARROLLO DEL PRIMER MIEMBRO

$$\frac{-2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{-2}{3} \cdot \left(\frac{8}{10} + \frac{1}{10}\right) =$$

$$= \frac{-2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{-18}{30}$$

DESARROLLO DEL SEGUNDO MIEMBRO

$$\frac{-2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{-8}{15} + \frac{-2}{30} =$$

$$= \frac{-16}{30} + \frac{-2}{30} = \frac{-18}{30}$$

En general: $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{f}{g}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{g}$

La propiedad distributiva permite transformar un producto en una suma o una suma en un producto.

Sacar factor común.

SACAR FACTOR COMÚN

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{-1}{6} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{7}{6} + \frac{-1}{6}\right) =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{6} = \frac{3}{5}$$

Factor común

$$m \cdot p + m \cdot q = m \cdot (p + q)$$

Si **m**, **p** y **q** son tres números racionales, la propiedad distributiva se puede expresar con la siguiente igualdad:

$$m \cdot (p + q) = m \cdot p + m \cdot q$$

Cuando esta igualdad se escribe en la forma

$$m \cdot p + m \cdot q = m \cdot (p + q)$$

se dice que se ha sacado el factor común **m**.

En ocasiones, al sacar factor común se simplifican los cálculos, sobre todo cuando la suma $p + q$ es igual a un entero.

1. Saca factor común y después calcula el valor de la expresión en cada caso:

a) $\frac{3}{11} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{11} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}$

d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{-9}{7}$

e) $\frac{11}{7} \cdot \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7}$

f) $\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{6} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4}$

Actividades

1. Calcula:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{-4}{7}$

b) $\frac{-3}{5} \cdot \frac{-4}{7}$ d) $\frac{-5}{3} \cdot \frac{2}{7}$

Completa en tu cuaderno la regla de los signos del producto de números racionales:

$+ \cdot + = \ldots$ $- \cdot - = \ldots$

$+ \cdot - = \ldots$ $- \cdot + = \ldots$

2. Indica qué propiedad del producto se pone de manifiesto en:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{-3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{-3}{7}$

c) $\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{3} = 1$

3. ¿Cuál es el único número racional que no tiene inverso?

¿Qué papel desempeña ese número en la suma?

4. Comprueba con ejemplos que la multiplicación de números racionales es conmutativa y asociativa.

5. Escribe los opuestos de los siguientes números racionales:

$2, \ \frac{-3}{5}, \ \frac{5}{7}, \ -8, \ 0, \ \frac{3}{7}, \ 4$

¿Hay algún número racional cuyo opuesto sea él mismo?

6. Escribe cada entero **a** en la forma $\frac{a}{1}$ y calcula:

a) $\frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{1}$

b) $-2 \cdot \frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{5} \cdot (-7)$

7. Observa los gráficos. La parte doblemente rayada representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ del rectángulo, es decir, $\frac{6}{12}$ del rectángulo.

$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12}$

Representa de este modo:

a) $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$

8. Calcula y contesta:

a) $\frac{-2}{3} \cdot \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\right)$

b) $\frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{5}$

¿Cómo son los resultados encontrados en a) y en b)?

9. Saca factor común en los casos siguientes:

a) $\frac{3}{11} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9}$

10. Calcula por separado los dos miembros de la siguiente igualdad:

$\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}$

¿Qué propiedad has comprobado?

11. Simplifica los cálculos sacando factor común:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{7}$

4. División de números racionales

DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

División de números racionales → Producto de números racionales

- $\frac{-3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{-3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-15}{8}$
- $\frac{-3}{2} : 4 = \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-3}{8}$
- $\frac{1}{6} : \frac{-1}{4} = \frac{1}{6} \cdot (-4) = \frac{-4}{6}$

División de números racionales.

Para que se pueda dividir un número racional $\frac{a}{b}$ (dividendo) entre otro número racional $\frac{c}{d}$ (divisor) es necesario que el divisor sea distinto de cero: $\frac{c}{d} \neq 0$.

En este caso **el cociente se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor.**

Dividendo: $\frac{a}{b}$ Divisor: $\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Observa que se obtiene el mismo resultado multiplicando en cruz los términos de las fracciones:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

EQUIVALENCIAS FUNDAMENTALES

$$\frac{2}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{10}{21} \Leftrightarrow \frac{7}{5} = \frac{2}{3} : \frac{10}{21} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{21} = \frac{2}{3} : \frac{7}{5}$$

Equivalencias fundamentales.

Se comprueba que, como en la división de enteros, en la división de números racionales se verifica que:

divisor × **cociente** = **dividendo**

$$\frac{c}{d} \times \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

En general, si **m**, **p** y **q** son tres números racionales distintos de cero se verifican las tres siguientes igualdades, que reciben el nombre de equivalencias fundamentales:

$$m = p \cdot q \iff p = m : q \iff q = m : p$$

1. Calcula:

a) $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$ b) $\frac{-8}{3} : \frac{-2}{9}$ c) $2 : \frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4} : \frac{2}{-7}$ e) $2 : \frac{-3}{7}$

2. Simplificar antes de multiplicar.

EJEMPLO RESUELTO

En ocasiones, antes de multiplicar números racionales conviene simplificar.

Ejemplo $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$

En la práctica se hace así: $\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{2}{5}$

Calcula de esta forma:

a) $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2}$ c) $\frac{10}{21} \cdot \frac{7}{10}$ d) $\frac{-7}{5} \cdot \frac{5}{3}$ e) $\frac{-3}{9} \cdot \frac{9}{5}$

5. Propiedades de la división de números racionales

COCIENTES EXACTOS DE NÚMEROS RACIONALES

Divisiones de racionales — Cociente exacto

- $2 : 3 = \frac{2}{1} : \frac{3}{1} = \frac{2}{3}$
- $\frac{-3}{4} : \frac{7}{5} = \frac{-3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{-15}{28}$

Número racional

Primera propiedad.

La división de números racionales tiene una característica que la diferencia de la división de números enteros.

El cociente exacto de una división de dos números enteros no siempre es un entero. Así, la división de enteros $6 : -2 = \frac{6}{-2} = -3$ da como cociente un entero.

Pero la división $2 : 3 = \frac{2}{3}$ da como cociente el número $\frac{2}{3}$, que no es entero. En cambio, **el cociente exacto de una división de dos números racionales es siempre un número racional, excepto en el caso de que el divisor sea cero.**

COCIENTE DE UNA SUMA POR UN NÚMERO

$$\underbrace{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : 2}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{\left(\frac{3}{4} : 2\right) + \left(\frac{1}{2} : 2\right)}_{\text{Segundo miembro}}$$

Primer miembro

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : 2 = \frac{5}{4} : \frac{2}{1} = \frac{5}{8}$$

Segundo miembro

$$\left(\frac{3}{4} : 2\right) + \left(\frac{1}{2} : 2\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Segunda propiedad.

La división de números racionales es distributiva respecto de la suma cuando la suma es el dividendo.

Así: $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : 2 = \left(\frac{3}{4} : 2\right) + \left(\frac{1}{2} : 2\right)$

Observa la comprobación de esta propiedad.

En el caso de que la suma sea el divisor, la propiedad, en general, no se cumple. Es decir:

$$2 : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \neq \left(2 : \frac{3}{4}\right) + \left(2 : \frac{1}{2}\right)$$

1. Indica en qué casos los cocientes exactos de los enteros que siguen son también enteros:

a) $-21 : 7$ b) $-27 : 10$ c) $-32 : 6$ d) $-48 : -6$

2. Simplifica como en el caso resuelto:

a) $\frac{-7}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{-7}{4}$

b) $\frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

c) $\frac{18}{5} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{13}{6} \cdot \frac{5}{13}$

d) $\frac{20}{13} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{13}{20} \cdot \frac{7}{4}$

3. En ocasiones, conviene descomponer en producto los dos términos de una fracción y después simplificar.

Simplifica como en el caso resuelto:

a) $\frac{-21}{15} = \frac{-7 \cdot \cancel{3}}{5 \cdot \cancel{3}} = \frac{-7}{5}$ b) $\frac{48}{-42}$ c) $\frac{-28}{35}$ d) $\frac{26}{39}$

6. El cuerpo de los números racionales

Propiedades de la suma.

PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

- **Asociativa**
- **Conmutativa**
- **Elemento neutro (0)**
- **Elemento opuesto**

$(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo abeliano

Conviene resumir las principales propiedades de las operaciones con números racionales.

El conjunto $\mathbb{Q}$, respecto de la suma $(+)$, tiene las cuatro propiedades: asociativa, conmutativa, elemento neutro (0) y elemento opuesto.

Siempre que en un conjunto hay definida una operación que verifica estas cuatro propiedades se dice que es un grupo abeliano o conmutativo. Por eso el conjunto $\mathbb{Q}$ respecto de la suma tiene estructura de grupo abeliano.

Es decir, el conjunto $\mathbb{Q}$ respecto de la suma, es un grupo abeliano.

Propiedades de la multiplicación.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

- **Asociativa**
- **Conmutativa**
- **Elemento neutro (1)**
- **Elemento inverso**

$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ es un grupo abeliano

El conjunto $\mathbb{Q}$, respecto de la multiplicación $(\times)$, tiene las propiedades siguientes: asociativa, conmutativa, elemento neutro (1) y elemento inverso.

Por cumplirse estas propiedades, el conjunto $\mathbb{Q}^*$ de los números racionales sin el cero, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, es un grupo abeliano o conmutativo respecto de la multiplicación.

Es decir, el conjunto $\mathbb{Q}^*$ respecto de la multiplicación, es un grupo abeliano.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

CUERPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

- **$(\mathbb{Q}, +)$ es un grupo abeliano**
- **$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ es un grupo abeliano**
- **Propiedad distributiva**

En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, además de las propiedades anteriores, se verifica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{f}{g}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{g}$$

Por ser $(\mathbb{Q}, +)$ un grupo abeliano y por ser $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ también un grupo abeliano y verificar además la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, el conjunto $\mathbb{Q}$ es un **cuerpo conmutativo** llamado cuerpo de los números racionales.

Es decir, el conjunto $\mathbb{Q}$ respecto de la suma y de la multiplicación, es un cuerpo conmutativo.

1. Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{f}{g}$ son tres números racionales cualesquiera, expresa mediante ellos:

a) Las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento opuesto de la suma de números racionales.

b) Las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro, elemento inverso.

c) La propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

7. Fracciones de términos racionales. Simplificación

Fracciones de términos no enteros y fracciones de términos racionales.

Fracciones de términos enteros

$\frac{-5}{6}$ $\quad$ $\frac{3}{4}$

Fracciones de términos no enteros

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $\frac{\frac{1}{2}}{3}$

Fracciones de términos racionales

$\frac{\frac{2}{3}}{4}$ $\quad$ $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$

Como las fracciones son cocientes de enteros, se escriben indistintamente:

- Con raya de fracción (—) → $\frac{-3}{2}$, $\frac{2}{5}$
- Con dos puntos (:) → $-3 : 2$; $2 : 5$

Observa que las divisiones indicadas (a) y (c) se pueden escribir en forma de fracción:

(a) $\sqrt{5} : 2 \longrightarrow$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(c) $\frac{5}{6} : \frac{3}{7} \longrightarrow$ (d) $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{7}}$

Las fracciones (b) y (d) se llaman **fracciones de términos no enteros.** La expresión (d) es un cociente de números racionales y se llama **fracción de términos racionales.**

Simplificación de fracciones de términos racionales.

Fracción dada $\quad \frac{2 + \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}$

Observa que esta fracción de términos racionales se puede simplificar convirtiéndola en una fracción de términos enteros.

Veamos cómo se procede:

PRIMER PASO	SEGUNDO PASO	TERCER PASO
Se hacen separadamente las operaciones indicadas en el numerador y las operaciones indicadas en el denominador. **En el numerador:** $2 + \frac{5}{3} = \frac{2}{1} + \frac{5}{3} = \frac{6+5}{3} = \frac{11}{3}$ **En el denominador:** $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$ $\frac{2 + \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{5}{12}}$	Se transforma la fracción de términos racionales en cociente de fracciones de términos enteros: $\frac{\frac{11}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{11}{3} : \frac{5}{12}$ Después se hace esta división: $\frac{11}{3} : \frac{5}{12} = \frac{11 \cdot 12}{3 \cdot 5} =$ $= \frac{11 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 5} = \frac{11 \cdot 4}{5} = \frac{44}{5}$	Si es posible, se simplifica la fracción obtenida: $\frac{44}{5}$ Si, como en este caso, es una fracción mayor que 1, se puede expresar como suma de un entero y una fracción menor que 1: $\frac{44}{5} = \frac{40}{5} + \frac{4}{5} = 8 + \frac{4}{5}$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

Calcula:

① $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ ② $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}$ ⑤ $3 \cdot \frac{1}{4}$ ⑥ $4 \cdot \frac{2}{5}$ ⑦ $4 \cdot \frac{1}{4}$ ⑧ $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula:

a) $\dfrac{1-\frac{3}{4}}{2+\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{5-\frac{3}{7}}{2+\frac{1}{4}}$ c) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}$ d) $\dfrac{3+\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}$ e) $\dfrac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}$

f) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}}$ g) $\dfrac{7}{\frac{3}{4}}$ h) $\dfrac{\frac{-1}{4}}{6}$ i) $\dfrac{\frac{3}{5}-1}{\frac{7}{3}+3}$ j) $\dfrac{3+\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}}$

2. Como en el caso de los números enteros, el valor absoluto de un número racional es el número racional que se obtiene prescindiendo del signo. El valor absoluto se representa por / /.

$/\frac{-5}{3}/ = \frac{5}{3}$ $/\frac{+5}{4}/ = \frac{5}{4}$

$/6/ = 6$ $/+8/ = /-8/ = 8$

Escribe los valores absolutos de -4, -8, $\frac{1}{4}$, $\frac{+3}{6}$, $\frac{-13}{4}$

3. Escribe el signo $>$, $<$ o $=$ en el círculo según corresponda:

a) $/\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}/ \bigcirc /\frac{3}{4}/ \cdot /\frac{1}{2}/$

b) $/\frac{3}{4} + \frac{1}{2}/ \bigcirc /\frac{3}{4}/ + /\frac{1}{2}/$

c) $/\frac{-2}{5} + \frac{1}{7}/ \bigcirc /\frac{-2}{5}/ + /\frac{1}{7}/$

d) $/-3 + \frac{1}{4}/ \bigcirc /-3/ + /\frac{1}{4}/$

4. Un peatón anduvo 6 km en $\frac{2}{3}$ de hora. ¿Cuál fue su velocidad en km/hora?

5. ¡Cuidado al simplificar! Si los términos de la fracción están descompuestos en productos **sí** se puede simplificar. Si están descompuestos en sumandos **no** se puede:

$\frac{12}{21} = \frac{\cancel{3} \cdot 4}{\cancel{3} \cdot 7} = \frac{4}{7}$ SÍ

$\frac{15}{23} = \frac{\cancel{10} + 5}{\cancel{10} + 13} = \frac{5}{13}$ NO

Simplifica:

a) $\frac{27}{63}$ b) $\frac{-15}{48}$ c) $\frac{72}{96}$ d) $\frac{56}{72}$

6. El número **a** es igual a los $\frac{3}{2}$ de los $\frac{4}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ de otro **b**. Calcula qué fracción de **b** es el número **a**.

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un móvil A recorre $\frac{3}{4}$ de km en $\frac{5}{12}$ de minuto, un móvil B recorre $\frac{5}{7}$ de km en $\frac{1}{3}$ de minuto y un móvil C recorre 8 km en minuto y medio. Calcula:

a) El recorrido de cada uno en 1 minuto.

b) El recorrido de cada uno en 1 segundo.

c) El recorrido de A en 1 minuto si triplica su velocidad.

d) El recorrido de B en 1 hora si reduce en $\frac{1}{3}$ su velocidad.

2. Un comerciante vende sus artículos en las rebajas de enero por $\frac{4}{7}$ de su precio en diciembre y en las rebajas de febrero por $\frac{3}{4}$ de su precio en las rebajas de enero.

Determina:

a) La fracción del precio de los artículos en diciembre que representa el precio por el que se vende en febrero.

b) El precio en diciembre y en enero de un jersey que en febrero se vende por 1.320 ptas.

c) El precio en diciembre y en febrero de una chaqueta que en enero se vende por 2.000 ptas.

3. Durante una campaña de publicidad el coste de los anuncios en radio supone $\frac{1}{4}$ de lo que se gasta en anuncios en televisión, y el coste de los anuncios en prensa supone $\frac{7}{8}$ de lo que se gasta en televisión. Si lo empleado en televisión representa $\frac{2}{5}$ del total del gasto de la campaña, determina:

a) La fracción del gasto total que representan los anuncios en radio.

b) La fracción del gasto total que representan los anuncios en televisión.

4. Dos tercios de los habitantes de una ciudad tienen menos de 40 años, y de éstos, tres quintos son menores de 20 años. Si la ciudad tiene 225.000 habitantes ¿cuántos tienen menos de 20 años?

5. La primera fase de un concurso de televisión está programada para que, como máximo, 3 de cada 10 concursantes puedan conseguir un premio de 100.000 ptas. y 3 de cada 15 puedan conseguir 200.000 ptas.

Se calcula también que sólo $\frac{2}{3}$ de estos concursantes premiados pueden acceder a la segunda fase.

a) ¿Qué fracción del total de concursantes se calcula que pueden acceder a la segunda fase?

b) Si en la segunda fase se prevén 30 concursantes ¿cuál es el presupuesto para los premios de la primera fase?

c) Si en la segunda fase se prevé que sólo obtendrá premio la tercera parte de sus concursantes ¿qué fracción del total de concursantes obtendrá premio en la segunda fase?

6. En invierno, $\frac{3}{5}$ del gas que se consume en una casa se emplea en calefacción; del resto, se emplea $\frac{1}{4}$ en la cocina, y lo demás en agua caliente. En verano no hay calefacción y el consumo en la cocina es $\frac{1}{3}$ del consumo de invierno, y el consumo en agua caliente representa $\frac{4}{5}$ del mismo en invierno. Calcula:

a) La fracción del consumo total en invierno que se emplea en la cocina y la que se emplea en agua caliente.

b) La fracción del consumo total en invierno que representa el consumo en la cocina en verano y la que representa el consumo en agua caliente en verano.

c) La fracción del consumo total en verano que se emplea en la cocina.

1. Potencia de base racional y exponente natural

POTENCIA DE UNA FRACCIÓN

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$$

Cuadrado de $\frac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Cubo de $\frac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Cómo se eleva una fracción a una potencia.

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional y **n** un número natural distinto de 0 y de 1, la potencia $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ se define como un producto de **n** factores iguales a $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\overset{n\text{ factores}}{\cdots\cdots}\frac{a}{b}$$

Como en el caso de potencias de base entera, en las potencias de base racional se verifica:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

Observa que si $\frac{a}{b}$ es un número racional, su cuadrado es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a}{b\cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$$

y su cubo es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$$

En general:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\overset{n\text{ factores}}{\cdots\cdots}\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Para elevar una fracción a una potencia se elevan a dicha potencia el numerador y el denominador de la fracción.

SIGNO DE LAS POTENCIAS DE BASE RACIONAL

Base	Exponente	Signo de la potencia
positiva (+)	par o impar	positivo (+)
negativa (−)	par	positivo (+)
	impar	negativo (−)

Signo de la potencia de base racional.

Observa el signo de estas potencias de base racional:

Base positiva

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Base negativa

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27}$$

Fíjate en que:

- Si la base es positiva, la potencia es siempre positiva.
- Si la base es negativa y el exponente es par, la potencia es positiva.
- Si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia es negativa.

2. Producto y cociente de potencias de la misma base

Cómo se multiplican potencias de la misma base.

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

- $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3+2} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$
- $\left(\frac{-2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^5 = \left(\frac{-2}{3}\right)^9$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+p}$$

Vamos a multiplicar estas potencias: $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^2$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3 \cdot a^2}{b^3 \cdot b^2} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$$

Observa que se puede obtener directamente el mismo resultado sumando los exponentes.

En general, si la base $\frac{a}{b}$ es un número racional y los exponentes **m** y **p** son números naturales, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+p}$$

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

Cómo se dividen potencias de la misma base.

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

- $\left(\frac{a}{b}\right)^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{5-2} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$
- $\left(\frac{-3}{2}\right)^4 : \left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \left(\frac{-3}{2}\right)^{4-3} = \left(\frac{-3}{2}\right)^1 = \frac{-3}{2}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-p}$$

Vamos a dividir estas potencias: $\left(\frac{a}{b}\right)^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^2$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^5}{b^5} : \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^5}{b^5} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^5 \cdot b^2}{b^5 \cdot a^2} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Observa que se puede obtener directamente el mismo resultado restando los exponentes.

En general, si la base $\frac{a}{b}$ es un número racional y los exponentes **m** y **p** son números naturales, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-p}$$

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

1. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^5$

b) $(-6)^1 \cdot (-6)^2$

c) $(-8)^4 \cdot (-8)^3$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$

e) $(-2)^1 \cdot (-2)^0 \cdot (-2)^3$

f) $(-3)^7 : (-3)^2$

g) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^2$

h) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 : \left(\frac{a}{b}\right)^2$

3. Potencia de una potencia. Potencia de un producto

Cómo se eleva una potencia a otra potencia.

POTENCIA DE UNA POTENCIA

- $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3\cdot 4}$
- $\left[\left(\frac{-3}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{-3}{7}\right)^{2\cdot 3}$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot p}$$

Vamos a elevar a 4 esta potencia: $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{a^3}{b^3}\right)^4 = \frac{(a^3)^4}{(b^3)^4} = \frac{a^{12}}{b^{12}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{12} = \left(\frac{a}{b}\right)^{3\times 4}$$

Observa que se puede obtener directamente el mismo resultado multiplicando los exponentes.

En general, si la base $\frac{a}{b}$ es un número racional y los exponentes **m** y **p** son números naturales, se tiene:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot p}$$

Para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Cómo se eleva un producto a una potencia.

POTENCIA DE UN PRODUCTO

- $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^3$
- $\left(2\cdot\frac{5}{7}\right)^4 = 2^4\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^4$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Elevemos al cubo este producto: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\right)^3 = \frac{(a\cdot c)^3}{(b\cdot d)^3} = \frac{a^3\cdot c^3}{b^3\cdot d^3} = \frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^3$$

Observa que se puede obtener directamente el mismo resultado elevando cada factor al cubo.

En general, si el producto base es $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ y el exponente **n** es un número natural, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Para elevar un producto a una potencia se eleva cada factor a dicha potencia.

1. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $[(-2)^3]^4$

b) $[(-2)^2]^4$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5$

d) $(-2)^2\cdot(-3)^2\cdot 5^2$

e) $(-6)^3\cdot 4^3\cdot 7^3$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^2$

g) $a^2\cdot b^2\cdot c^2$

h) $a^3\cdot b^3\cdot c^3\cdot d^3$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$

j) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^4$

k) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2$

4. Potencias de exponente entero

Definición de potencia de exponente entero.

Las potencias estudiadas hasta ahora tenían todas por exponente un número natural y por base un número entero o un número racional:

- Potencia con base entera: 2^3, $(-3)^4$.
- Potencia con base racional $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(\frac{-2}{3}\right)^4$

Todas estas potencias se interpretan como productos.

Ahora bien, ¿qué significan los símbolos 2^{-3} y $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$?

Si suponemos que la regla de multiplicar potencias $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$ es válida cuando **m** y **p** son enteros, se puede dar un significado a las potencias que como 2^{-3} y $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ tienen el exponente negativo.

En efecto, de las igualdades (a) y (b) se obtienen las igualdades (c) y (d).

(a) $2^{-3} \cdot 2^3 = 2^0 = 1$ → (c) $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ → (d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$

En general, si la base **a** es un número racional distinto de cero y el exponente es un entero negativo, se tiene:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$; $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$
- $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$; $2^{-6} = \frac{1}{2^6}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^5}$
- $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^2}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Toda potencia de exponente negativo es igual a la unidad dividida por la misma potencia con exponente positivo.

Cómo se eleva una fracción a una potencia de exponente entero.

Si aplicamos la definición anterior a la fracción $\frac{3}{4}$ se tiene:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^5} = \frac{1}{\frac{3^5}{4^5}} = \frac{1}{1} : \frac{3^5}{4^5} = \frac{4^5}{3^5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$$

En general, si $\frac{a}{b}$ es una fracción cualquiera:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

FRACCIÓN ELEVADA A UN EXPONENTE NEGATIVO

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Para elevar una fracción a un exponente negativo se invierten los términos de la fracción y se cambia el signo del exponente.

5. Operaciones con potencias de exponente entero

Las operaciones con potencias de exponente entero son las mismas que cuando el exponente es natural.

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplos

- $5^{-3} \cdot 5^{-4} = 5^{-3+(-4)} = 5^{-7}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7+(-3)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$

En general, $\mathbf{a^m \cdot a^p = a^{m+p}}$

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

Ejemplos

- $6^{-2} : 6^{-5} = 6^{-2-(-5)} = 6^{-2+5} = 6^{3}$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{5}\right)^{6} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2-6} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-8}$

En general, $\mathbf{a^m : a^p = a^{m-p}}$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Ejemplos

- $[(2)^{-3}]^{4} = 2^{-3 \cdot 4} = 2^{-12}$
- $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}\right]^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-4(-3)} \left(\frac{2}{5}\right)^{12}$

En general, $\mathbf{(a^m)^p = a^{m \cdot p}}$

POTENCIA DE UN PRODUCTO

Para elevar un producto a una potencia se eleva a dicha potencia cada uno de los factores.

Ejemplos

- $[2 \cdot 5]^{-3} = 2^{-3} \cdot 5^{-3}$
- $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

En general, $\mathbf{(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m}$

1. Calcula:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{6} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{4}{3}\right)^{4}$

d) $\left(\frac{3}{7}\right)^{6} : \left(\frac{3}{7}\right)^{4}$

e) $\left(\frac{-2}{7} \cdot \frac{2}{5}\right)^{-3}$

f) $[(-3)^{-2}]^{4}$

g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

h) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3}$

i) $[(-2)^{4}]^{3}$

2. Calcula:

a) $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{p} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{q}$

b) $\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)^{2} : \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{4}$

d) $\left[\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{2}\right]^{-3}$

e) $\left[\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{n}\right]^{p}$

f) $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{p} : \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{q}$

g) $[2^{-3}]^{-5}$

h) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-7}$

i) $\left[\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}\right]^{-5}$

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula:

① 10^2 ④ 2^2 ⑦ 4^2 ⑩ 6^3 ⑬ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$

② 10^3 ⑤ 2^3 ⑧ 4^3 ⑪ 7^3 ⑭ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

③ 10^4 ⑥ 2^4 ⑨ 5^3 ⑫ 8^3 ⑮ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

2. Cuadrado de los números de dos cifras que acaban en 5.

Para calcular mentalmente el cuadrado de 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 y 95 hay que tener en cuenta que todos ellos acaben en 5.

Si deseamos calcular el cuadrado de 35, aislamos las cifras de las decenas 3 y multiplicamos (3) por el número consecutivo (4): $3 \cdot 4 = 12$.

Finalmente se coloca a la derecha del 12 el 25 y resulta $1.225 \rightarrow 35^2 = 1.225$.

Calcula de esta manera los cuadrados de los números enteros de dos cifras acabados en 5.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula:

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^{8}$

b) $\left(\frac{2}{13}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^{9}$

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{7} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-6}$

d) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-5} : \left(\frac{-2}{3}\right)^{-3}$

e) $\left(\frac{-1}{7}\right)^{4} : \left(\frac{-1}{7}\right)^{-3}$

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales:

$\left(\frac{-2}{5}\right)^2$ $\left(\frac{-2}{5}\right)$ $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-1}$

$\left(\frac{-2}{5}\right)^3$ $\left(\frac{-2}{5}\right)^0$ $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}$

3. Expresa en forma de una sola potencia:

a) $x^{-2} \cdot x^{-3} \cdot x^{-5}$ c) $x^{-3} : x^{-4}$

b) $x^{-5} : x^{-7}$ d) $x^5 \cdot x^{-5}$

4. Halla el valor de:

a) 2^{-1} d) 100^{-3} g) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ e) 10^{-4} h) $(-3)^{-2}$

c) 100^{-1} f) $(10^{-3})^{-1}$ i) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-1}$

5. Calcula el valor de:

$x^2 \cdot x^1$ $x^4 : x^0$

$x^5 : x^3$ $(x^1)^3$

siendo: a) $x = -2$ y b) $x = 1$.

6. Indica el signo de cada uno de los siguientes números racionales:

$\left[\left(\frac{-2}{7}\right)^3\right]^{-2}$ $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-3}\right]^{-2}$

$\left[\left(\frac{-2}{7}\right)^{-1}\right]^3$ $[(-2)^5]^{-2}$

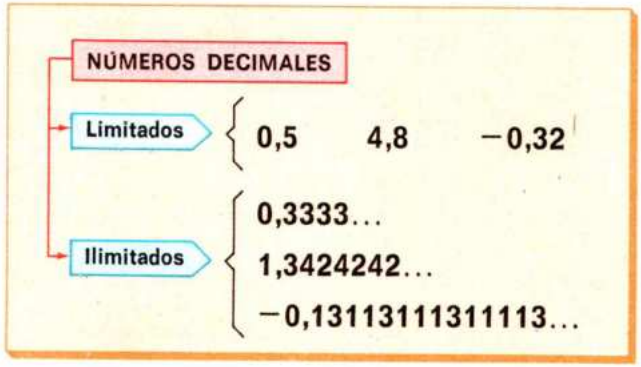
$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^{-2}$ $\left[\left(\frac{-1}{8}\right)^{-2}\right]^{-3}$

$[(-2)^{\pm 1}]^2$

TEMA 7 DECIMALES. I

1. Clasificación de los números decimales

Decimales limitados y decimales ilimitados.



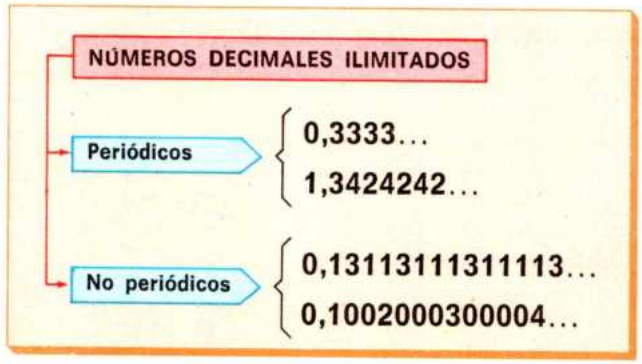
Observa estos números decimales, unos positivos y otros negativos.

Los números decimales que como 0,5, 4,8 y −0,32 tienen un número determinado de cifras decimales se llaman **decimales limitados.**

Los números decimales que como 0,3333..., 1,34242... y −0,13113111311113... tienen infinitas cifras decimales se llaman **decimales ilimitados.**

En los números decimales ilimitados los puntos suspensivos indican que el número de cifras decimales es infinito.

Clasificación de los decimales ilimitados.



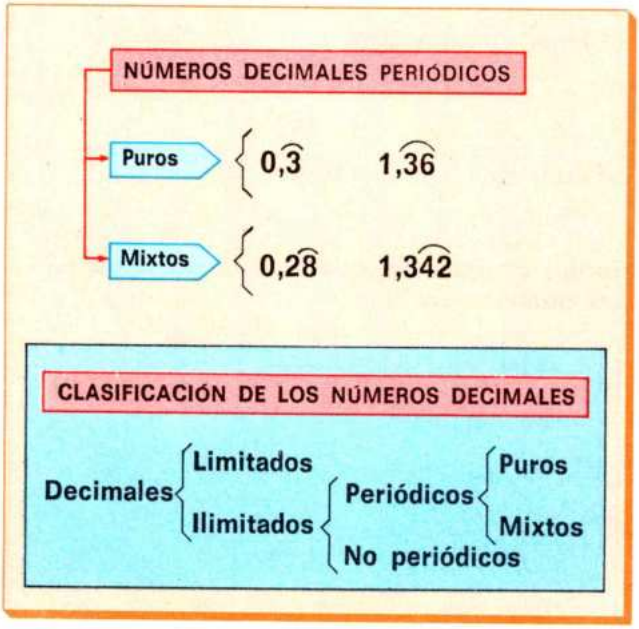
Los números decimales ilimitados que contienen una cifra o un grupo de cifras que se repiten indefinidamente se llaman **decimales ilimitados periódicos.**

Ejemplo Los números 0,333... y 1,3424242... son decimales periódicos.

Los números decimales ilimitados que no contienen ningún grupo de cifras que se repiten periódicamente se llaman números **decimales ilimitados no periódicos.**

Ejemplo 0,1002000300004...

Clasificación de los decimales ilimitados periódicos.



En los números decimales ilimitados periódicos, la cifra o grupo de cifras que se repite se llama **período.** El período se suele indicar con un arco.

En el número 0,3333... el período es 3 y se escribe $0{,}3333\ldots = 0{,}\widehat{3}$.

En el número 1,34242... el período es 42 y se escribe $1{,}3424242\ldots = 1{,}3\widehat{42}$.

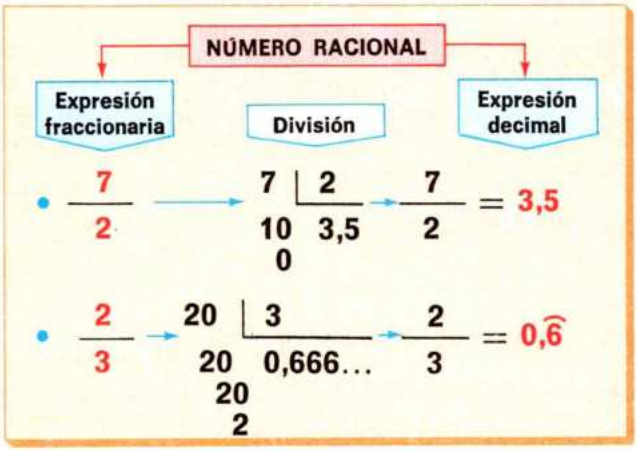
Cuando el período empieza inmediatamente después de la coma el decimal se llama **periódico puro,** y se llama **periódico mixto** cuando el período no empieza inmediatamente después de la coma.

Ejemplos $0{,}\widehat{3}$ y $1{,}\widehat{36}$ son decimales periódicos puros.

$0{,}2\widehat{8}$ y $1{,}3\widehat{42}$ son decimales periódicos mixtos.

2. Expresión decimal de un número racional: casos

Cómo encontrar la expresión decimal de un número racional.



Ya sabemos que un número racional se puede expresar mediante una fracción, pero igualmente se puede expresar mediante un número decimal.

Así, el número racional $\frac{7}{2}$ se expresa en forma decimal por 3,5, que es el cociente de dividir el numerador 7 entre el denominador 2.

Análogamente, el número racional $\frac{2}{3}$ se escribe en forma decimal así: $0,\widehat{6}$, que es el cociente de dividir el numerador 2 entre el denominador 3.

Para encontrar la expresión decimal de un número racional, basta dividir el numerador entre el denominador.

Casos que se pueden presentar.

Al dividir **a : b** pueden ocurrir dos casos:

PRIMER CASO

Cuando la división a : b es exacta después de obtener una o varias cifras decimales.

En este caso el número racional $\frac{a}{b}$ da lugar a un decimal limitado.

Ejemplo

Como la división 13 : 5 = 2,6 es exacta, $\frac{13}{5} = 2,6$.

SEGUNDO CASO

Cuando la división a : b no es exacta.

En este caso, como los restos han de ser menores que el divisor, llegará un momento en que se repetirán los restos y por tanto aparecerá en el cociente una cifra o un grupo de cifras que se repetirá, obteniéndose un decimal ilimitado periódico. Por ejemplo $\frac{7}{3} = 2,\widehat{3}$.

Se observa que el decimal correspondiente a un número racional fraccionario o es limitado o es ilimitado periódico, pero nunca es ilimitado no periódico. Como un entero o un decimal no se alteran al escribirlos en forma decimal periódica de período cero (0), resulta:

$$25 = 25,0000\ldots;\quad 0,75 = 0,75000\ldots$$

El decimal correspondiente a un número racional es un decimal periódico.

3. Fracción generatriz de un número decimal. I

Cómo se calcula la fracción generatriz.

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL LIMITADO

Decimal limitado → Fracción generatriz

- $2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$
- $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Ejemplos de fracciones que dan lugar a números decimales periódicos puros

- $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots = 0{,}\widehat{1}$; $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots = 0{,}\widehat{2}$
- $\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots = 0{,}\widehat{7}$; $\frac{4}{99} = 0{,}040404\ldots = 0{,}\widehat{04}$
- $\frac{32}{99} = 0{,}3232\ldots = 0{,}\widehat{32}$; $\frac{45}{99} = 0{,}4545\ldots = 0{,}\widehat{45}$

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIÓDICO PURO

Decimal periódico puro → Fracción generatriz

- $2{,}\widehat{6} = 2 + 0{,}\widehat{6} = 2 + \frac{6}{9} = \frac{24}{9}$
- $1{,}\widehat{34} = 1 + 0{,}\widehat{34} = 1 + \frac{34}{99} = \frac{133}{99}$

Número sin coma − Parte entera

$$1{,}\widehat{34} = \frac{134 - 1}{99}$$

Supongamos que conocemos un número decimal. Entonces podemos hallar una fracción tal que al dividir el numerador por el denominador se obtenga como cociente dicho decimal. Dicha fracción se llama **fracción generatriz** del número decimal dado.

Distinguiremos tres casos:

PRIMER CASO

Cuando el decimal es un decimal limitado.

Sea el decimal 2,5. Para hallar una fracción generatriz de este decimal en el numerador se pone el número decimal, sin coma, y en el denominador se pone la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

SEGUNDO CASO

Cuando el decimal es un decimal periódico puro.

Consideremos en primer lugar números decimales periódicos puros sin parte entera.

Observa en estos ejemplos que cuando el período tiene una cifra decimal el denominador de la fracción generatriz tiene **un nueve**; cuando el período tiene dos cifras el denominador tiene **dos nueves**, etc.

Teniendo en cuenta estas observaciones es fácil hallar la fracción generatriz de un decimal periódico puro que tenga 0 en la parte entera:

$0{,}\widehat{6} = \frac{6}{9}$ $\quad 0{,}\widehat{8} = \frac{8}{9}$ $\quad 0{,}\widehat{7} = \frac{7}{9}$

$0{,}\widehat{35} = \frac{35}{99}$ $\quad 0{,}\widehat{04} = \frac{4}{99}$ $\quad 0{,}\widehat{56} = \frac{56}{99}$

Observa cómo se procede en el caso de que el decimal periódico puro tenga parte entera.

Observa en el último ejemplo que la fracción generatriz del número decimal periódico puro $1{,}\widehat{34}$ se puede encontrar escribiendo una fracción cuyo numerador sea 134 − 1 (es decir, el número sin coma menos la parte entera) y cuyo denominador es 99 (porque el período tiene dos cifras).

Para hallar la fracción generatriz de un número decimal periódico puro se escribe una fracción cuyo numerador es el número decimal sin la coma menos la parte entera y cuyo denominador es un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período.

4. Fracción generatriz de un número decimal. II

FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

Número dado $2,13\widehat{6}$

$$\frac{a}{b} = 2,13\widehat{6}$$

① ↓

$$100\,\frac{a}{b} = 213,\widehat{6}$$

② ↓

$$100\,\frac{a}{b} = \frac{2136 - 213}{9}$$

③ ↓

$$\frac{a}{b} = \frac{2136 - 213}{900} = \frac{1923}{900}$$

Fracción generatriz

TERCER CASO

Cuando el decimal es un decimal periódico mixto.

Un número decimal periódico mixto, como $2,13\widehat{6}$, tiene, en general, tres partes: parte entera (2), parte no periódica (13) y parte periódica o período (6).

Para hallar la generatriz de un decimal periódico mixto como $2,13\widehat{6}$ se procede así:

① Llamamos $\frac{a}{b}$ a la fracción generatriz $\frac{a}{b} = 2,13\widehat{6}$ y se multiplica el decimal dado por la potencia de 10 conveniente para que resulte un decimal periódico puro. En este caso por 100.

② Se calcula la fracción generatriz del decimal periódico puro $213,\widehat{6}$.

③ Finalmente se divide por la misma potencia por la que se había multiplicado en ①.

CASO PARTICULAR

Decimales periódicos cuya parte periódica está formada por nueves.

Observa estos decimales periódicos: $0,\widehat{9}$; $2,\widehat{9}$ y $3,6\widehat{9}$.

Apliquemos las reglas anteriores para hallar una fracción equivalente a estos decimales.

EJEMPLO 1

$0,\widehat{9}$

$0,\widehat{9} = \frac{9}{9} = 1$

Luego

$0,999\ldots = 1$

EJEMPLO 2

$2,\widehat{9}$

$2,\widehat{9} = 2 + 0,\widehat{9} = 2 + \frac{9}{9} =$

$= 2 + 1 = 3$

Luego

$2,999\ldots = 3$

EJEMPLO 3

$3,6\widehat{9}$

$\frac{a}{b} = 3,6\widehat{9}$

$10\,\frac{a}{b} = 36,\widehat{9}$

$10\,\frac{a}{b} = \frac{369 - 36}{9} = \frac{333}{9}$

$\frac{a}{b} = \frac{333}{90} = \frac{37}{10} = 3,7$

Luego

$3,69999\ldots = 3,7$

$+1$

$3,6999\ldots9 = 3,7$

Si un decimal periódico tiene la parte periódica formada exclusivamente por nueves, este decimal es igual a un entero o un decimal limitado que se forma prescindiendo de los nueves en la parte periódica y sumando 1 a la última cifra de la parte no periódica.

5. Escritura de decimales mediante potencias de 10

Potencias de base 10 y exponente entero.

POTENCIAS DE BASE 10

De exponente positivo

$10^0 = 1$ $\quad$ $10^4 = 10.000$

$10^1 = 10$ $\quad$ $10^5 = 100.000$

$10^2 = 100$ $\quad$ $10^6 = 1{,}000.000$

$10^3 = 1.000$ $\quad$ $10^n = 1000^n...0$

De exponente negativo

Décima: $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Centésima: $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$

Milésima: $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$

Recuerda que las potencias de base 10 y exponente natural permiten expresar abreviadamente las unidades enteras del sistema de numeración: unidades, decenas, centenas, etc.

Las potencias de base 10 y exponente entero negativo permiten escribir en forma de potencia las unidades decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc.

Ejemplo $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0{,}000001 \rightarrow$ 1 millonésima

Escritura abreviada de números mediante potencias de 10.

ALGUNOS EJEMPLOS DE ESCRITURA ABREVIADA DE NÚMEROS MEDIANTE POTENCIAS DE BASE 10

Distancia de la Tierra al Sol

150₁000.000 de km $= 15 \cdot 10^7$ **km**

Peso en gramos de un átomo de hidrógeno

$0{,}0000000000000000000000016 =$
$= 16 \cdot 0{,}0000000000000000000000001 =$
$= 16 \cdot 10^{-25}$

Las potencias de base 10 y exponente natural permiten escribir en forma de potencia los números que expresan cantidades grandes, como la distancia de la Tierra al Sol y la velocidad de la luz. Así, la velocidad de la luz es $300.000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$.

Del mismo modo, las potencias de base 10 y exponente negativo permiten escribir en forma de potencias los números decimales que expresan cantidades muy pequeñas, como el peso de un átomo de hidrógeno.

Descomposición polinómica de números decimales.

DESCOMPOSICIONES POLINÓMICAS

- $34 = 30 + 4 = 3 \cdot 10^1 + 4$
- $0{,}34 = 0{,}3 + 0{,}04 = 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

Con ayuda de las potencias de 10 se pueden escribir en forma polinómica los números enteros y los decimales:

$$274{,}53 = 200 + 70 + 4 + 0{,}5 + 0{,}03 =$$
$$= 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

1. Escribe, utilizando potencias de 10, los siguientes números:

a) $5{,}000.000 = 5 \cdot 10^6$ $\quad$ c) 700.000 $\quad$ e) 0,000001 $\quad$ g) 0,005

b) 180₁000.000 $\quad$ d) 0,003 $\quad$ f) 100.000 $\quad$ h) 9₁000.000

2. Escribe en forma polinómica:

a) 235,28 $\quad$ b) 34,65 $\quad$ c) 1.248,37 $\quad$ d) 374,645 $\quad$ e) 60₁000.000

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla, mediante divisiones, el número decimal limitado, periódico puro o periódico mixto.

   Completa el cuadro en tu cuaderno.

Fracciones irreducibles.	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{15}{13}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{15}$	$\frac{19}{14}$	$\frac{23}{16}$
Número decimal limitado.			×						
Número decimal periódico puro.	×								
Número decimal periódico mixto.									
Descomposición del denominador en producto de factores primos.	3	2×5^2							

   Comprueba que si el denominador de la fracción irreducible contiene sólo los factores primos 2 ó 5 entonces resulta un decimal limitado. Si el denominador no contiene ninguno de los factores 2 ó 5 entonces resulta un decimal periódico puro.

   Finalmente, si el denominador contiene otros factores primos además de 2 ó 5 entonces resulta un decimal periódico mixto.

2. Halla las fracciones generatrices de los siguientes decimales exactos:

   a) 0,54 c) 3,4 e) 5,2 g) 0,25 i) 3,25 k) 5,60

   b) 0,36 d) 2,7 f) 4,7 h) 0,75 j) 2,34 l) 2,30

3. Halla las fracciones generatrices de los siguientes decimales periódicos puros:

   a) $2,\widehat{3}$ d) $0,\widehat{4}$ g) $0,\widehat{25}$ j) $2,\widehat{36}$ m) $1,\widehat{32}$

   b) $3,\widehat{2}$ e) $3,\widehat{21}$ h) $0,\widehat{26}$ k) $0,\widehat{27}$ n) $2,\widehat{34}$

   c) $0,\widehat{1}$ f) $2,\widehat{34}$ i) $1,\widehat{05}$ l) $0,\widehat{36}$ o) $3,\widehat{35}$

4. Halla las fracciones generatrices de los siguientes decimales periódicos mixtos:

   a) $0,1\widehat{3}$ d) $1,1\widehat{3}$ g) $3,52\widehat{3}$ j) $1,6\widehat{32}$

   b) $0,2\widehat{4}$ e) $1,2\widehat{3}$ h) $1,37\widehat{4}$ k) $3,56\widehat{3}$

   c) $0,3\widehat{5}$ f) $1,5\widehat{2}$ i) $3,26\widehat{3}$ l) $1,15\widehat{1}$

5. Escribe directamente el entero o el decimal limitado correspondiente a los siguientes números decimales periódicos:

   a) 0,999... d) 3,999... g) 2,3999... j) $5,61\widehat{9}$

   b) 1,999... e) 5,9... h) 4,5999... k) $3,26\widehat{9}$

   c) 2,999... f) 6,9... i) 6,7999... l) $1,03\widehat{9}$

6. Escribe, utilizando las potencias de 10, los siguientes números:

   a) $7{,}000.000 = 7 \cdot 10^6$ d) 150,000.000 g) 0,0004

   b) 190,000.000 e) 0,0001 h) $0,000003 = 3 \cdot 0,000001 = 3 \cdot 10^{-6}$

   c) 800.000 f) 0,0002 i) 0,000006

TEMA 8 DECIMALES. II

1. Ordenación densa de los números racionales

El conjunto ℚ como conjunto denso.

Observa la recta entera, en la que se ha representado una parte del conjunto ℤ de los números enteros, y la recta racional, en la que se ha representado una parte del conjunto ℚ de los números racionales. Los dos conjuntos están ordenados sobre la recta.

Entre las ordenaciones de ℤ y ℚ hay una diferencia fundamental: en la recta entera hay números enteros consecutivos; en cambio, en la recta racional no hay números racionales consecutivos.

Por ejemplo, entre los enteros 1 y 2 de la recta entera es obvio que no hay ningún entero intermedio; en cambio, en la recta racional entre el 1 y el 2 hay infinitos números racionales.

Observa que la media aritmética de 1 y 2 es $\frac{3}{2}$

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

y que $\frac{3}{2}$ es el punto medio del segmento de extremos 1 y 2.

Dados dos números racionales, la media aritmética de ambos es otro número racional que se encuentra entre los números dados.

Ejemplo

Observa que la media aritmética de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{2}$ es $\frac{13}{8}$

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{10}{4}}{2} = \frac{\frac{13}{4}}{2} = \frac{13}{8}$$

y que $\frac{13}{8}$ ocupa el punto medio de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{2}$

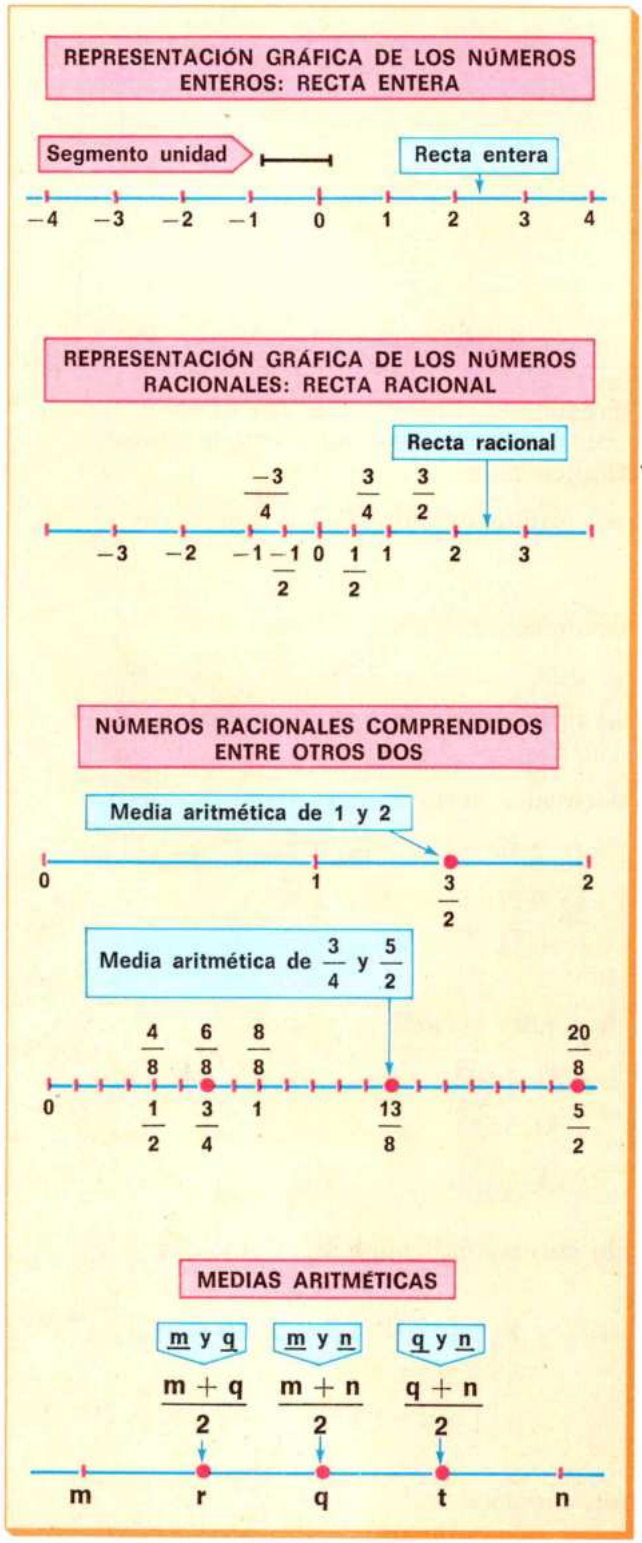
Esto significa que la media aritmética de dos números racionales es otro número racional que está comprendido entre ambos.

Como entre dos números racionales siempre hay otro número racional, resulta que entre los números racionales **m** y **n** está su media aritmética **q**.

Como se ve en la figura, entre **m** y **q** está su media aritmética **r**; entre **q** y **n** está su media aritmética **t**.

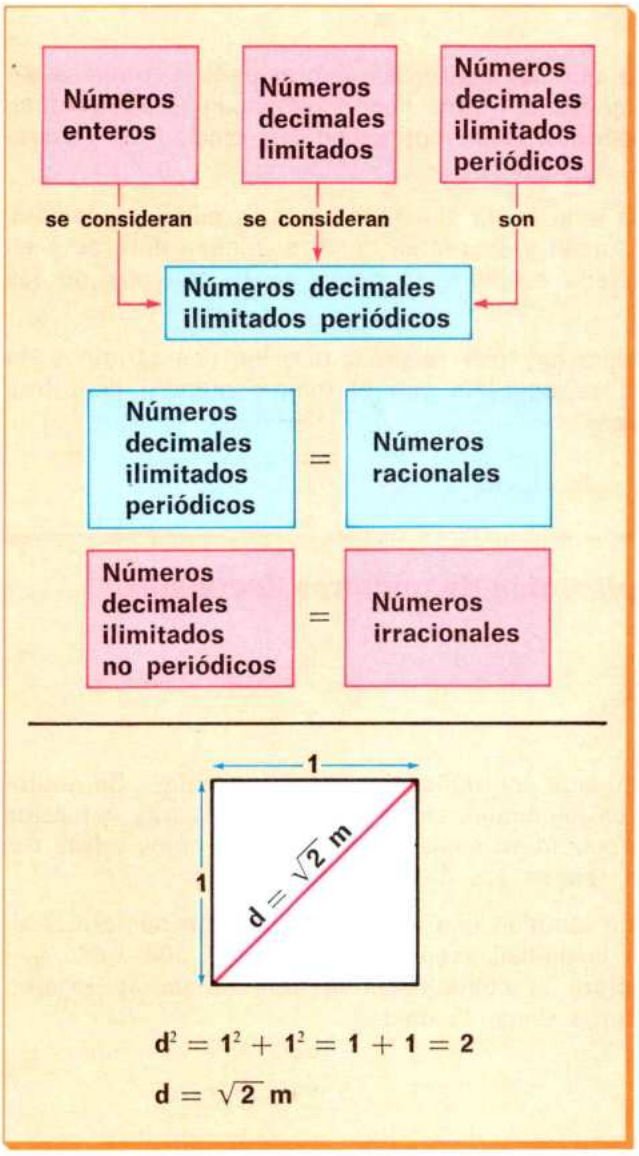
Continuando de esta forma podemos encontrar tantos números racionales entre **m** y **n** como queramos.

Entre dos números racionales dados hay comprendidos infinitos números racionales. El conjunto ℚ de los números racionales es un conjunto denso.



2. Breve idea del número irracional y del número real

Números irracionales.



Los números racionales, ya sean enteros o fraccionarios, se pueden expresar en forma decimal utilizando números decimales ilimitados periódicos.

Ejemplos

$2 = 2{,}000\ldots$ $\qquad \frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}25000\ldots$

$\frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6}$ $\qquad \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$

Ahora bien, ¿existe alguna fracción generatriz del número decimal ilimitado no periódico como 0,13113111311113...?

La respuesta es que no puede haber ninguna fracción $\frac{a}{b}$ que sea generatriz de un número decimal ilimitado no periódico.

Estos números cuya expresión decimal no es periódica no son racionales y se les llama **números irracionales.**

Ejemplo El número $\sqrt{2}$ es irracional.

Observa el cuadrado de lado 1 m. La longitud de su diagonal se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 1 + 1 = 2$$

Así resulta que la diagonal mide $d = \sqrt{2}$ m.

Se puede probar que, al hacer la raíz cuadrada, de 2 resulta un número decimal ilimitado no periódico:

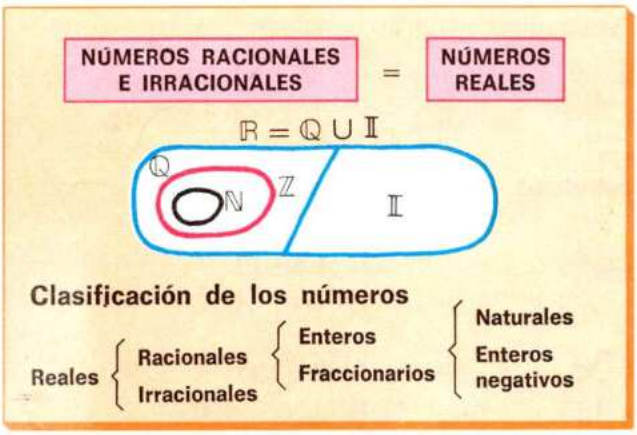
$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ Por tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Hay otros muchos números, como $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, ..., π, ..., que son irracionales.

El conjunto de los números irracionales se representa por la letra $\mathbb{I}$.

Se llama números irracionales a los decimales ilimitados no periódicos.

El conjunto de los números reales.



Los números decimales, tanto limitados como ilimitados, se llaman **números reales.**

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales está formado por el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales y el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales.

Número real es todo número que puede escribirse en forma decimal.

3. Operaciones con decimales. I

Suma y resta de números decimales.

SUMA EN FORMA DECIMAL

$$\begin{array}{r} 3{,}45 \\ +\ 0{,}126 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3{,}45 \\ +\ 0{,}126 \\ \hline 3{,}576 \end{array}$$

RESTA EN FORMA DECIMAL

$$\begin{array}{r} 9{,}5 \\ -\ 2{,}36 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 9{,}50 \\ -\ 2{,}36 \\ \hline 7{,}14 \end{array}$$

Siempre que no aparezcan expresiones periódicas se puede operar en forma decimal. Cuando aparecen decimales periódicos se opera con sus fracciones generatrices.

Observa esta suma y esta resta. Los números decimales se suman y se restan como si fuesen enteros y en el resultado se pone la coma en la columna de las comas.

En la resta hay que recordar que los dos términos de la resta se escriben con el mismo número de cifras decimales.

Multiplicación de números decimales.

MULTIPLICACIÓN EN FORMA DECIMAL

$$\begin{array}{rl} 4{,}3 & \longrightarrow 1 \text{ cifra decimal} \\ 0{,}25 & \longrightarrow +\ 2 \text{ cifras decimales} \\ \hline 21\,5 & \qquad\quad 3 \text{ cifras decimales} \\ 86 & \\ \hline 1{,}075 & \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN DE UN DECIMAL POR 10, 100, 1.000

$0{,}35 \times 10 = 3{,}5$

$0{,}35 \times 100 = 35$

$0{,}35 \times 1.000 = 350$

Observa esta multiplicación con decimales. Se multiplican los decimales como si fueran números naturales y del producto se separan tantas cifras como cifras decimales tengan los dos factores.

Recuerda también que para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros (10, 100, 1.000, ...) se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad.

1. Calcula las siguientes sumas de decimales.

Cuando aparezcan decimales periódicos utiliza las fracciones generatrices.

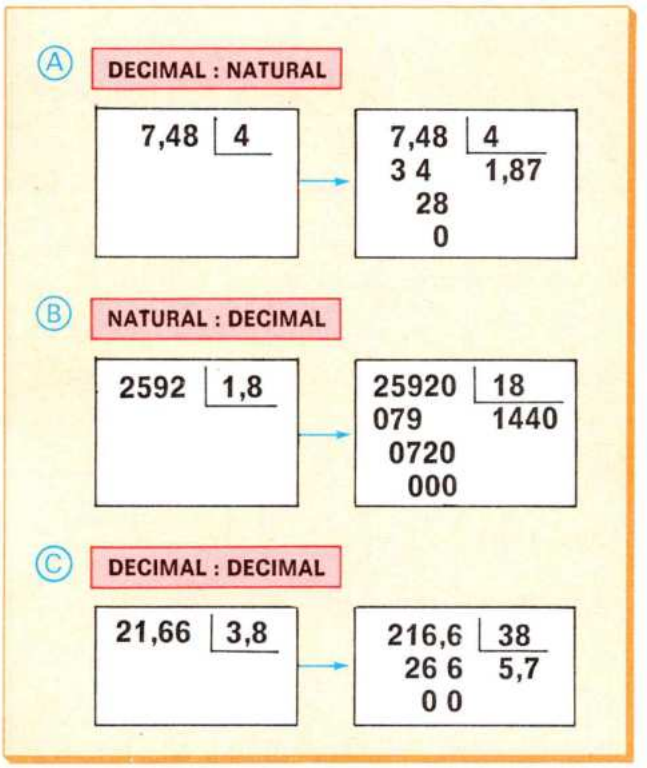
a) $1{,}4 + 2{,}5 + 3{,}78$
b) $0{,}\widehat{28} + 1{,}53$
c) $0{,}\widehat{4} + 0{,}\widehat{8} + 0{,}\widehat{2}$
d) $0{,}18 + 0{,}\widehat{6}$
e) $2{,}\widehat{7} + 2{,}\widehat{3}$
f) $5{,}\widehat{6} + 2{,}\widehat{1}$
g) $0{,}\widehat{6} + 1{,}5$
h) $2{,}3 + 4{,}5$

2. Recuerda lo dicho sobre los números decimales periódicos que tienen como período la cifra 9 y calcula:

a) $3{,}\widehat{9} + 7{,}2 = 4 + 7{,}2$
b) $5{,}\widehat{9} + 2{,}1 = \ldots$
c) $3{,}6\widehat{9} + 2{,}41 = 3{,}7 + 2{,}41$
d) $0{,}5\widehat{9} + 3{,}5 = \ldots$
e) $7{,}2\widehat{9} + 3{,}5 = \ldots$
f) $0{,}7\widehat{9} + 1{,}2 = \ldots$
g) $2{,}5 \times 3{,}4$
h) $2{,}\widehat{3} \times 1{,}5$
i) $1{,}\widehat{6} \cdot 10$
j) $1{,}\widehat{2} \cdot 0{,}8$
k) $4{,}25 \cdot 0{,}75$
l) $0{,}56 \times 100$

4. Operaciones con decimales. II

División de números decimales.



A **Decimal entre natural**

Cuando el dividendo es un número decimal y el divisor es un número natural, la división se hace como si el dividendo y el divisor fueran números naturales, pero en el cociente se pone una coma al bajar la primera cifra decimal:

$$7{,}48 : 4 = 1{,}87$$

B **Natural entre decimal**

Cuando el dividendo es un número natural y el divisor es un número decimal se suprime la coma del divisor y a la derecha del dividendo se ponen tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.

Después se hace la división como si fueran números naturales:

$$2.592 : 1{,}8 = 1.440$$

C **Decimal entre decimal**

Cuando el dividendo y el divisor son números decimales se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tantos lugares a la derecha como cifras decimales tenga el divisor:

$$21{,}66 : 3{,}8 = 5{,}7$$

Potencia de un decimal.

POTENCIA DE UN DECIMAL

- $(0{,}5)^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$
- $(0{,}2)^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$
- $(0{,}03)^5 = 0{,}0000000243$

Observa estas potencias de base decimal y recuerda que se calculan como si la base fuera un número natural y del resultado se separan tantas cifras decimales como indica el producto del exponente por el número de cifras decimales de la base.

Ejemplo

Para calcular $(0{,}03)^5$ se calcula primero $3^5 = 243$ y después se separan $2 \times 5 = 10$ cifras decimales:

$$(0{,}03)^5 = 0{,}0000000243$$

1. Haz las siguientes operaciones.

Cuando aparezcan decimales periódicos utiliza las fracciones generatrices.

a) $122{,}5 : 35$
b) $122{,}5 : 3{,}5$
c) $12{,}25 : 3{,}5$
d) $0{,}\widehat{28} : 0{,}\widehat{2} = \frac{28}{99} : \frac{2}{9}$
e) $0{,}\widehat{32} : 0{,}\widehat{5}$
f) $0{,}\widehat{6} : 0{,}\widehat{3}$
g) $0{,}5\widehat{3} : 2$
h) $0{,}2\widehat{61} : 3$
i) $0{,}3\widehat{14} : 6$
j) $0{,}5 \times 10$
k) $0{,}3 \times 10$
l) $0{,}6 \times 100$

2. Calcula las siguientes potencias:

a) $(0{,}005)^2$
b) $(0{,}0003)^2$
c) $(0{,}0001)^2$
d) $(0{,}025)^2$
e) $(0{,}013)^2$
f) $(0{,}0009)^2$
g) $(0{,}02)^5$
h) $(0{,}003)^5$

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

① 32×10	⑤ $0{,}45 \times 10$	⑨ $37 : 10$	⑬ $37{,}5 : 10$
② 32×100	⑥ $0{,}45 \times 100$	⑩ $37 : 100$	⑭ $37{,}5 : 100$
③ 32×1.000	⑦ $0{,}45 \times 1.000$	⑪ $37 : 1.000$	⑮ $37{,}5 : 1.000$
④ 32×10.000	⑧ $0{,}45 \times 10.000$	⑫ $374 : 10.000$	⑯ $84 : 100$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Observa este número y escribe ocho cifras más:

0,1002000300004000005...

¿Cómo es este número, racional o irracional? ¿Por qué?

2. Escribe:

a) Dos números decimales ilimitados periódicos.

b) Dos números decimales ilimitados no periódicos.

c) Cuáles de los números escritos son racionales y cuáles irracionales.

3. Utilizando la media aritmética, halla:

a) Cinco números racionales comprendidos entre 3 y 4.

b) Cinco números racionales comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$

4. Recuerda que $\mathbb{N} = \{\text{naturales}\}$, $\mathbb{Z} = \{\text{enteros}\}$, $\mathbb{Q} = \{\text{racionales}\}$, $\mathbb{I} = \{\text{irracionales}\}$, $\mathbb{R} = \{\text{reales}\}$.

Indica a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

a) 4 d) $\frac{1}{4}$ g) 1,41423...

b) 0,5 e) $0{,}56\widehat{73}$ h) 1,313131...

c) $\frac{2}{3}$ f) $-5{,}83$

5. Tacha las relaciones que sean incorrectas:

a) $3 \in \mathbb{Q}$ c) $\frac{1}{4} \in \mathbb{Z}$ e) $1{,}3\widehat{47} \in \mathbb{R}$

b) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ d) $0{,}5\widehat{67} \in \mathbb{I}$ f) $1{,}45\widehat{7} \in \mathbb{Q}$

6. Prueba que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ la fracción $\frac{a+c}{b+d}$ está entre las dos.

Prueba que: ① $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$,

es decir, que $a(b+d) < b(a+c)$.

② $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$,

es decir, que $(a+c) \cdot d < (b+d) \cdot c$.

Como aplicación de esta propiedad, calcula un número racional comprendido entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{4}$

7. ¿Cuántos números racionales hay entre dos números racionales dados?

8. Calcula seis números racionales comprendidos entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$

9. Calcula:

a) Los $\frac{2}{3}$ de 129,6.

b) La sexta parte del 32,4.

c) $(0{,}13)^2$

d) $(0{,}0013)^2$

e) $(0{,}0012)^2$

f) $(0{,}003)^4$

g) $(0{,}06)^3$

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Del robo cometido en un Banco hay 4 testigos, pero ninguno de ellos se acuerda del número de la matrícula del coche utilizado por los ladrones.

El primer testigo dijo que el número de la matrícula tenía 4 cifras. El segundo testigo dijo que las dos primeras cifras eran idénticas. El tercero dijo que las dos últimas cifras eran también iguales. El cuarto testigo recordaba que el número de la matrícula era un cuadrado perfecto.

Con la información dada por los testigos ¿puedes averiguar el número de la matrícula?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Si el grosor de las 350 páginas de un libro es de 1,92 cm ¿cuál es el grosor de cada una de sus páginas?

Observa cómo está planteado el problema y determina, de la misma forma, el grosor de una de las páginas de este libro de Matemáticas.

2. Una molécula de agua pesa $\frac{9}{301} \cdot 10^{-21}$ gramos.

a) ¿Cuántos millones de moléculas contiene 1 g de agua? ¿Y 1 mg de agua?

b) ¿Cuánto pesan 10^{21} millones de moléculas de agua? ¿Y 10^{21} billones de moléculas de agua?

c) ¿Cuántas moléculas contiene una gota de agua de 70 mm^3 de volumen?

3. En el envase de unos analgésicos se lee:

Cada comprimido contiene:

— Ácido acetilsalicílico:	0,4 g.
— Vitamina C:	0,24 g.
— Bicarbonato sódico:	0,9 g.
— Carbonato sódico:	0,2 g.
— Sacarina:	0,005 g.
— Regulador de ph:	1,4892 g.
— Aromatizantes:	0,0158 g.

Calcula:

a) Las cantidades necesarias de cada componente para producir los 10 comprimidos que trae el envase.

b) La dosis para un adulto de 80 kg y para un niño de 35 kg si para cada 10 kg de peso se pueden absorber de 200 a 300 mg de ácido acetilsalicílico diarios.

4. En una tienda de decoración se ofrecen moquetas de 1.745 ptas., 1.890 ptas., 2.500 pesetas y 3.550 ptas. el metro cuadrado, respectivamente.

Determina el importe de enmoquetar una habitación rectangular de 4,40 m de largo por 3,25 de ancho en cada uno de los tipos de moqueta si la mano de obra es un cuarto del coste de la moqueta y si la tienda ofrece una rebaja del 10 por 100 del total.

¿A cuánto sale, finalmente, el metro cuadrado de cada moqueta ya colocada?

5. Un comerciante importa 1.500 aparatos de radio de Japón. Por cada uno paga 152 yens japoneses al fabricante, 120 dólares al transportista y 112 ptas. de impuestos.

El comerciante vende todas las radios y registra una pérdida equivalente a un décimo de lo invertido.

¿Cuál ha sido el precio de venta?
(100 yens japoneses = 67,996 ptas.; 1 dólar = 159,004 ptas.)

6. En una papelería disponen de una fotocopiadora alquilada por la que pagan 5.745 pesetas al mes más 0,15 ptas. por cada fotocopia hecha. Además, por cada fotocopia el papel supone 0,95 ptas. y la electricidad 0,61 ptas. En enero se han hecho 15.370 fotocopias, en febrero 10.266 y en marzo 13.428, y se han cobrado a 3,50 ptas. cada una.

¿Cuál ha sido el beneficio o pérdida resultante en cada uno de los meses?

¿Cuál ha sido el beneficio o pérdida total?

TEMA 9 OPERACIONES CON RADICALES CUADRÁTICOS

1. Radicales cuadráticos. I

Raíz cuadrada de un número racional positivo.

Observa los números racionales positivos 36, $\frac{4}{9}$ y 2.

Para el número racional 36 existen dos números racionales, 6 y -6, cuyo cuadrado es 36.

Por eso se dice que 6 y -6 son las raíces cuadradas de 36, se escribe $\sqrt{36} = \pm 6$ y significa que $6^2 = 36$ y que $(-6)^2 = 36$.

Para el número racional $\frac{4}{9}$ existen también dos números, $\frac{2}{3}$ y $\frac{-2}{3}$, tales que su cuadrado es $\frac{4}{9}$

Por eso se dice que $\frac{2}{3}$ y $\frac{-2}{3}$ son las raíces cuadradas de $\frac{4}{9}$ y se escribe: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$

Para el número racional 2 no existen números racionales cuyo cuadrado sea 2.

Lo mismo ocurre con 3, 5, 6, $\frac{1}{2}$ y con otros números.

Lo que sucede en estos casos es que las raíces cuadradas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, ... no son números racionales, sino que son números irracionales, es decir, son decimales ilimitados no periódicos.

Observa los nombres de los números que intervienen en una raíz cuadrada. El índice 2 no se suele escribir.

RAÍZ CUADRADA EXACTA

- $\sqrt{36} = \pm 6$, porque $(\pm 6)^2 = 36$
- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$, porque $\left(\pm \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

RAÍZ CUADRADA INEXACTA (NÚMEROS IRRACIONALES)

- $\sqrt{2} = 1{,}4142...$
- $\sqrt{3} = 1{,}7320...$

Infinitas cifras decimales no periódicas

Índice → $\sqrt[2]{36} = \pm 6$ ← Raíz cuadrada

Radicando

En general, si a es un número racional positivo pueden ocurrir dos casos:

PRIMER CASO

Que exista otro número racional b cuyo cuadrado sea a, es decir, $(b)^2 = a$. En este caso también $(-b)^2 = a$, y se dice que b y $-b$ son raíces cuadradas de a: $\sqrt{a} = \pm b$.

SEGUNDO CASO

Que no exista ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a a.

En este caso se dice que el número a no tiene raíz cuadrada en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales y que $\sqrt{a}$ es un número irracional.

1. Indica en cada caso la raíz cuadrada, el índice y el radicando:

a) $\sqrt{25} = 5$ { raíz cuadrada $= \pm 5$; índice $= 2$; radicando $= 25$ } b) $\sqrt{49} = 7$ c) $\sqrt{81} = 9$

2. Completa en tu cuaderno:

a) $\sqrt{4} = 2$, porque $(\pm 2)^2 = 4$

b) $\sqrt{9} = ...$, porque $(...)^2 = ...$

c) $\sqrt{16} = ...$, porque $(...)^2 = ...$

d) $\sqrt{25} = ...$, porque $(...)^2 = ...$

2. Radicales cuadráticos. II

Raíces cuadradas de los números no positivos: cero y números negativos.

RAÍZ CUADRADA DE CERO

$\sqrt{0} = 0$, porque $0^2 = 0$

El número 0 tiene una sola raíz cuadrada, que es 0, ya que $0^2 = 0$.

Los números negativos, como -9, -2, etc., no tienen raíz cuadrada. En efecto, como el cuadrado de todo número real negativo es positivo, no hay ningún número ni racional ni irracional cuyo cuadrado sea -9, -2, etcétera.

Por tanto, ninguna raíz cuadrada de radicando negativo tiene raíces.

Radicales cuadráticos.

RADICALES CUADRÁTICOS SEMEJANTES

$2\sqrt{3}$ $\quad -5\sqrt{3}$ $\quad 6\sqrt{3}$

RADICALES CUADRÁTICOS NO SEMEJANTES

$2\sqrt{5}$ $\quad -3\sqrt{2}$ $\quad 4\sqrt{7}$

Acabamos de ver que los números racionales positivos y el cero son los únicos que tienen raíz cuadrada, sea ésta racional o irracional.

En general, si **a** es un número racional positivo o nulo y **b** es un número racional cualquiera, las expresiones $b\sqrt{a}$ y $\sqrt{a}$ son números reales llamados **radicales cuadráticos.**

En el radical $b\sqrt{a}$, el número **a** se llama **radicando** y el **b** se llama **coeficiente del radical.**

$b\sqrt{a}$ se lee: **b** - raíz cuadrada de **a**.

Cuando dos radicales cuadráticos, como $3\sqrt{5}$ y $8\sqrt{5}$, tienen el mismo radicando, se llaman **radicales cuadráticos semejantes.**

Valor aritmético de un radical.

VALOR ARITMÉTICO DE UN RADICAL

Radical	Valor aritmético
$\sqrt{4}$	2
$\sqrt{9}$	3
$\pm\sqrt{5}$	$+\sqrt{5}$

Todo número racional positivo tiene dos raíces cuadradas: una positiva y otra negativa.

Al valor positivo de la raíz se le llama **valor aritmético.**

En estos dos temas de operaciones con radicales sólo se considera la raíz positiva, es decir, el valor aritmético del radical.

1. Completa en tu cuaderno:

a) $(-2)^2 = \ldots$; $2^2 = \ldots \rightarrow \sqrt{4} = \ldots$

b) $(-3)^2 = \ldots$; $3^2 = \ldots \rightarrow \sqrt{9} = \ldots$

c) $5^2 = \ldots$; $(-5)^2 = \ldots$; $\rightarrow \sqrt{25} = \ldots$

d) $6^2 = \ldots$; $(-6)^2 = \ldots$; $\rightarrow \sqrt{36} = \ldots$

2. Indica cuáles de los siguientes números racionales positivos carecen de raíz cuadrada en el conjunto $\mathbb{Q}$:

3; 4; 9; 6,25; 8; 81; 100; 1.000

3. Suma y resta de radicales cuadráticos semejantes

Cómo se suman radicales cuadráticos semejantes.

SUMA DE RADICALES SEMEJANTES

- $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (3 + 4)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$
- $-8\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = (-8 + 12)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Observa cómo se suman estos dos radicales cuadráticos semejantes, $3\sqrt{5}$ y $4\sqrt{5}$, y también estos otros dos radicales cuadráticos semejantes: $-8\sqrt{2}$ y $12\sqrt{2}$.

Para sumar dos radicales cuadráticos semejantes se deja el mismo radicando y se suman los coeficientes.

En general, $p\sqrt{a} + q\sqrt{a} = (p + q)\sqrt{a}$

Radicales cuadráticos opuestos.

RADICALES OPUESTOS

- $5\sqrt{3} \xrightarrow{\text{Opuesto}} (-5)\sqrt{3}$
- $2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{Opuesto}} (-2)\sqrt{6}$

Observa estos radicales cuadráticos: $5\sqrt{3}$ y $-5\sqrt{3}$.

La suma de estos dos radicales da 0. Por eso se dice que $-5\sqrt{3}$ es el radical opuesto de $5\sqrt{3}$ y que $5\sqrt{3}$ y $-5\sqrt{3}$ son **radicales cuadráticos opuestos.**

$(-p)\sqrt{a}$ es opuesto de $p\sqrt{a}$ porque sumados dan cero.
$(-p)\sqrt{a} + p\sqrt{a} = (-p + p)\sqrt{a} = 0\sqrt{a} = 0$

Resta de radicales cuadráticos semejantes.

RESTA DE RADICALES SEMEJANTES

$$2\sqrt{6} - 9\sqrt{6} = 2\sqrt{6} + (-9)\sqrt{6} =$$
$$= [2 + (-9)]\sqrt{6} = -7\sqrt{6}$$

Como ocurre con los números enteros y con los números racionales, la resta de radicales se reduce a una suma.

Para restar dos radicales semejantes se suma al primero el opuesto del segundo:

$$3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = 3\sqrt{5} + (-7)\sqrt{5} =$$
$$= [3 + (-7)]\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

1. **Escribe:**
   a) Tres radicales semejantes y otros tres que no lo sean.
   b) Dos radicales semejantes opuestos.

2. **Halla las sumas:**
   a) $30\sqrt{10} + 7\sqrt{10} - 3\sqrt{10}$
   b) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$
   c) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$
   d) $3\sqrt{11} + 5\sqrt{11} + 6\sqrt{11}$
   e) $-8\sqrt{11} + 4\sqrt{11} + 2\sqrt{11}$
   f) $6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

3. **Halla el opuesto del radical cuadrático y después suma cada radical en cada caso con su opuesto:**
   a) $\sqrt{6}$ b) $7\sqrt{4}$ c) $-3\sqrt{2}$ d) $-7\sqrt{3}$ e) $-5\sqrt{13}$ f) $6\sqrt{14}$

4. **Calcula:**
   a) $\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{7} - 19\sqrt{7}$ c) $-4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ d) $-5\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$

4. Producto de radicales cuadráticos.

Cómo se multiplican radicales cuadráticos.

PRODUCTO DE RADICALES CUADRÁTICOS

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

- $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{4} = 2 \cdot 3\sqrt{6 \cdot 4} = 6\sqrt{24}$

$$p\sqrt{a} \cdot q\sqrt{b} = p \cdot q\sqrt{ab}$$

Observa cómo se multiplican dos radicales cuadráticos.

Fíjate en que se multiplican los radicandos y en que también se multiplican los coeficientes.

En general:

$$\begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \\ p\sqrt{a} \cdot q\sqrt{b} = p \cdot q\sqrt{a \cdot b} \end{cases}$$

Extracción de factores de un radical cuadrático.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE 108 y 720

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

720	5
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Consideremos el número 1.000.

Como $1.000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^2 \cdot 10$ resulta:

$$\sqrt{1.000} = \sqrt{10^2 \cdot 10} = \sqrt{10^2}\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$$

Se dice que del radical $\sqrt{1.000}$ hemos extraído el factor 10.

Del mismo modo, del radical $\sqrt{108}$ se puede extraer el factor 6:

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Asimismo del $\sqrt{720}$ se puede extraer el factor 12:

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^2 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

1. Calcula:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

d) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$

e) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

f) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}$

g) $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5}$

h) $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{6}$

i) $4\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{3}$

j) $3\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{2}$

k) $5\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{2}$

l) $(-3\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{3}$

2. Calcula:

a) $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{3} \cdot (7\sqrt{21} + 8\sqrt{21})$

d) $3\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{21} + 3\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{21}$

e) $\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{21}$

f) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

3. Extrae todos los factores posibles del radicando:

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot 2$

c) $\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot 5$

d) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5}$

e) $\sqrt{50}$

f) $\sqrt{60}$

g) $\sqrt{72}$

h) $\sqrt{54}$

i) $\sqrt{128}$

j) $\sqrt{400}$

k) $\sqrt{4.000}$

l) $\sqrt{500}$

5. División de radicales cuadráticos

Cómo se dividen radicales cuadráticos.

DIVISIÓN DE RADICALES CUADRÁTICOS

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Dividendo = divisor × cociente

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{b \cdot \frac{a}{b}}$$

Observa cómo se dividen dos radicales cuadráticos.

Fíjate en que se dividen los radicandos y en que también se dividen los coeficientes.

En general, si $b \neq 0$ y $q \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{p\sqrt{a}}{q\sqrt{b}} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Observa que en todos los casos el cociente obtenido verifica esta relación:

divisor × cociente = dividendo

1. Calcula:

a) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{8\sqrt{125}}{4\sqrt{125}}$ c) $\frac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{3}}$ d) $\frac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$ e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{32}}$

f) $\sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$ g) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ h) $\sqrt{\frac{4}{625}}$ i) $\sqrt{\frac{12}{121}}$

2. Descompón en producto de dos factores de modo que uno de ellos tenga raíz cuadrada y extrae después los factores que puedas:

a) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2}$ c) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{24}$ g) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3}$

b) $\sqrt{54}$ d) $\sqrt{72}$ f) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2}$ h) $\sqrt{90}$

3. Suma.

Si se extraen factores fuera del radicando se pueden sumar en ocasiones radicales cuadráticos que no tienen el mismo radicando.

EJEMPLO RESUELTO

Suma: $3\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + \sqrt{98}$

Extraemos factores:

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{50} = 15\sqrt{2}$

$98 \mid 2$ → $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$
$18 \quad 49$
0

$3\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + \sqrt{98} = 9\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (9 - 15 + 7)\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$

Calcula de este modo:

a) $\sqrt{20} - \sqrt{125} + \sqrt{45}$ c) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$

b) $\sqrt{50} + 2\sqrt{18} - \sqrt{32}$ d) $2\sqrt{20} - 3\sqrt{8} + \sqrt{50}$

6. Potencia de una raíz

Cómo se eleva un radical cuadrático a una potencia.

POTENCIA DE UNA RAÍZ

- $(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{3^2} = 3$
- $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{5^3}$

$$(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}$$

Observa lo que ocurre al desarrollar estas potencias que tienen por base un radical cuadrático.

En general:

$$(\sqrt{a})^p = \underbrace{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \dots \sqrt{a}}_{p \text{ factores}} = \sqrt{\underbrace{a \cdot a \dots a}_{p \text{ factores}}} = \sqrt{a^p}$$

Por consiguiente:

$$(\sqrt{10})^3 = \sqrt{10^3}; \quad (\sqrt{5})^7 = \sqrt{5^7}$$

Para elevar un radical cuadrático a una potencia se eleva a dicha potencia el radicando.

1. Observa los ejercicios resueltos y calcula los restantes:

$(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{7} = 7 \cdot \sqrt{7}$

$(\sqrt{13})^4 = \sqrt{13^4} = \sqrt{13^2 \cdot 13^2} = \sqrt{13^2} \cdot \sqrt{13^2} = 13 \cdot 13 = 13^2$

a) $(\sqrt{17})^5$ c) $(\sqrt{19})^2$ e) $(\sqrt{10})^3$ g) $(\sqrt{5})^2$ i) $(\sqrt{3})^4$

b) $(\sqrt{7})^2$ d) $(\sqrt{21})^2$ f) $(\sqrt{19})^3$ h) $(\sqrt{5})^3$ j) $(\sqrt{3})^6$

2. Lee atentamente y efectúa:

Recuerda que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, y que $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Estas fórmulas que vimos para números enteros se verifican también para números racionales y para radicales.

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 + 3 + 2\sqrt{2 \cdot 3} = 5 + 2\sqrt{6}$

b) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$ d) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$ f) $(1 + \sqrt{2})^2$

c) $(4 - \sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$ g) $(\sqrt{3} - 1)^2$

3. Lee atentamente y calcula.

Recuerda que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, es decir, suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Esta fórmula se verifica, además de con los números enteros, con los números racionales y con los radicales.

a) $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

b) $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})$ e) $(5 + \sqrt{3}) \cdot (5 - \sqrt{3})$

c) $(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})$ f) $(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} - \sqrt{2})$

d) $(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})$ g) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{6} - 2\sqrt{5})$

4. Calcula:

a) $(\sqrt{5})^2$ d) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$ g) $(3 + \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{8})^2$ e) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$ h) $(3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2})$

c) $(\sqrt{6})^2$ f) $(\sqrt{3} + 1)^2$ i) $(5 - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})$

7. Racionalización de denominadores

EXPRESIONES FRACCIONARIAS EQUIVALENTES

Expresiones fraccionarias equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot h}{b \cdot h}$$

Si $h \neq 0$

RACIONALIZACIÓN DE UNA EXPRESIÓN FRACCIONARIA

Expresión fraccionaria → $\frac{5}{\sqrt{3}}$ = Expresión fraccionaria racionalizada → $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Primer caso

$$\frac{a}{c\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{cb}$$

Segundo caso

$$\frac{a}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$$

$$= \frac{a \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{a \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

Racionalización de denominadores con radicales cuadráticos.

Dada una expresión fraccionaria o fracción de términos no enteros, como $\frac{5}{\sqrt{3}}$, con frecuencia interesa reducirla a otra expresión equivalente y que tenga por denominador un número racional. Esta reducción se llama **racionalización de denominadores.**

Con las expresiones fraccionarias o fracciones de términos no enteros se opera exactamente igual que con las fracciones de términos enteros.

En general, si $\frac{a}{b}$ es una fracción de términos no enteros, la expresión $\frac{a \cdot h}{b \cdot h}$ (donde **h** es distinto de cero) es equivalente a la expresión $\frac{a}{b}$

Para racionalizar denominadores con radicales cuadráticos distinguiremos dos casos.

PRIMER CASO

Cuando el denominador no incluye sumas y restas.

Para racionalizar la expresión fraccionaria $\frac{5}{\sqrt{3}}$ se multiplican sus dos términos por el denominador:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Observa cómo se procede en general.

SEGUNDO CASO

Cuando el denominador incluye sumas o restas.

Para racionalizar el denominador de la fracción de términos no enteros $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ se multiplican los dos términos de la fracción por la expresión conjugada del denominador, que es $\sqrt{5} + \sqrt{3}$:

$$\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{4 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{4 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}$$

Obsérvese cómo se procede en general.

1. Racionaliza cada una de las siguientes expresiones:

$$\frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}, \quad \frac{7}{\sqrt{8} + \sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Efectúa las siguientes sumas de radicales cuadráticos semejantes:

a) $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 13\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + \sqrt{5}$

2. Efectúa los siguientes productos de radicales:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

d) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$

e) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$

f) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$

g) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$

h) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$

i) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$

j) $2\sqrt{12} \cdot 5\sqrt{3}$

k) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$

l) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$

3. De las siguientes igualdades, indica cuáles son verdaderas y cuáles son falsas:

a) $\sqrt{a^2} = a$

b) $(\sqrt{a})^2 = a$

c) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

d) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

e) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

f) $\sqrt{4 + 9} = 2 + 3$

g) $\sqrt{25 - 9} = 5 - 3$

h) $\sqrt{(a + b)^2} = a + b$

i) $\sqrt{25 + 36} = 5 + 6$

4. Extrae el mayor factor posible de los radicales siguientes:

$\sqrt{80}$, $\sqrt{112}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{96}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$

5. Multiplica las expresiones fraccionarias $\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ y comprueba que da 1.

6. Efectúa la siguiente operación, simplificando todo lo que puedas:

$(3\sqrt{6} - \sqrt{24} + \sqrt{42})\sqrt{3}$

7. Extrae factores fuera del radical y simplifica el radical cuadrático:

$\sqrt{16 \cdot 144 \cdot 169 \cdot 100}$

8. Multiplica los siguientes radicales cuadráticos y simplifica:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{10}$

9. Racionaliza:

a) $\frac{5}{2\sqrt{2}}$

b) $\frac{4}{2 + \sqrt{2}}$

c) $\frac{8}{6 - 2\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

g) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$

10. Racionaliza $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$, multiplica el resultado por $\frac{7}{3 + \sqrt{2}}$ y simplifica después.

11. Simplifica estas expresiones:

a) $\frac{1}{a - \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{a + \sqrt{b}}$

b) $\sqrt{\frac{a - b}{(a - b)^2} \cdot \frac{a + b}{a^2 - b^2}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{9^{-2}}}$

TEMA 10 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1. Lenguaje algebraico

Lenguaje aritmético y lenguaje algebraico.

LUISA USA UN LENGUAJE ARITMÉTICO

- Número elegido → 5
- Doble del número → 10
- Le suma 6 → $+\ 6$ / 16
- Divide esta suma por 2 → $16 : 2 = 8$
- Del resultado resta el primer número → $8 - 5 = 3$

PEDRO USA UN LENGUAJE ALGEBRAICO

- Número elegido → x
- Doble del número → $2x$
- Le suma 6 → $2x + 6$
- Divide esta suma por 2 → $\frac{2x + 6}{2} = x + 3$
- Del resultado resta el primer número → $x + 3 - x = 3$

Se quiere probar que «si al doble de un número se le suma 6, después a esta suma se la divide por 2 y del resultado se resta el primer número, queda 3».

Observa cómo han hecho la comprobación Luisa y Pedro.

Luisa ha hecho su comprobación utilizando un número (el 5) y haciendo con él las operaciones del enunciado.

Como sólo ha usado números diremos que Luisa ha usado un **lenguaje aritmético.**

Pedro ha utilizado una letra (la **x**) para designar un número cualquiera. El lenguaje utilizado por Pedro es más general que el utilizado por Luisa y se llama **lenguaje literal** o **lenguaje algebraico.**

1. Expresa, utilizando letras, los siguientes enunciados:

a) El cuadrado de un número es igual a 2,25 → $x^2 = 2{,}25$.

b) El cubo de un número es igual a 27.

c) La mitad de un número más la quinta parte de un número.

d) El cuadrado de un número más el cubo del mismo número.

e) El triple de **x** más el cuadrado de **y** más 5.

f) La mitad de la edad de Luis.

g) La mitad de la edad de Luis es 8 años.

h) El cuadrado de **x** es menor que 26.

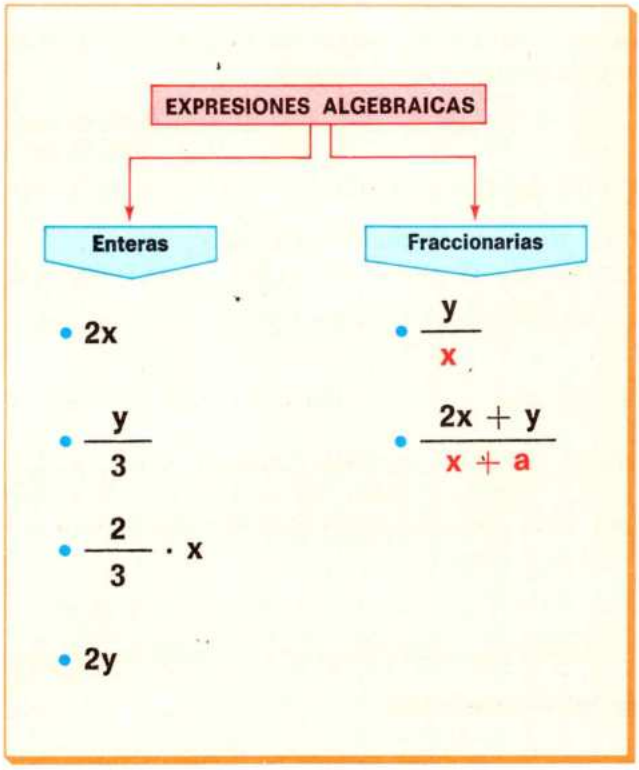
i) La suma del cuadrado de un número y 30 es 46.

2. Comprueba de la forma que lo hace Pedro este enunciado:

«Si al triple de un número se le suma 6, después a esta suma se la divide por 3 y del resultado se resta el primer número ¿qué número queda?»

2. Expresiones algebraicas. Valor numérico

Expresiones algebraicas enteras y expresiones algebraicas fraccionarias.



Sean **x** e **y** dos números racionales distintos de cero.

Formemos con estos números las siguientes expresiones:

- El doble de **x** → $2 \cdot x$ o bien $2x$.
- Dos tercios de **x** → $\frac{2}{3} \cdot x$ o bien $\frac{2 \cdot x}{3}$, o bien $\frac{2x}{3}$
- La mitad de **x** es igual a un tercio de **y** → $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y$, o bien: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

Cada una de estas expresiones es una agrupación de números y letras que están separados por los signos de las operaciones aritméticas y se llaman **expresiones algebraicas.**

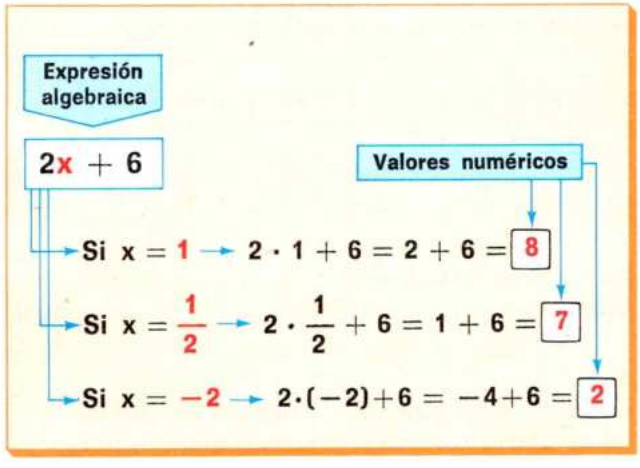
Las expresiones algebraicas en las que las letras están sometidas solamente a las operaciones de sumar, restar y multiplicar ($+$, $-$ y $\cdot$) se llaman **expresiones algebraicas enteras.** Las expresiones algebraicas que contienen alguna letra como denominador o divisor se llaman **expresiones algebraicas fraccionarias.**

Una expresión algebraica es una agrupación de números y de letras separados por los signos de las operaciones aritméticas.

Una expresión algebraica es entera cuando las letras están sometidas solamente a las operaciones de sumar, restar y multiplicar ($+$, $-$ y $\cdot$).

Una expresión algebraica es fraccionaria si contiene alguna letra como denominador o divisor.

Valor numérico de una expresión algebraica.



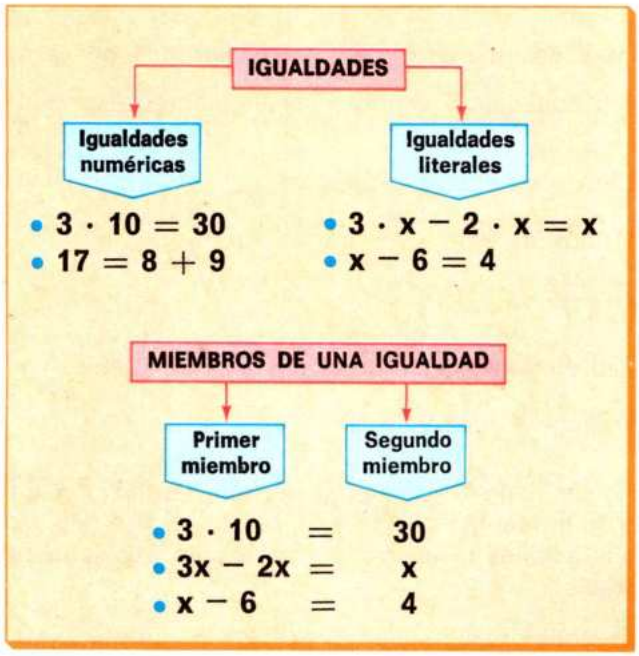
Considera esta expresión algebraica $2x + 6$, en la que la letra **x** representa un número racional.

El valor que tenga esta expresión dependerá del valor que se dé a la letra **x**:

- Si a **x** se le da el valor 1, la expresión $2x + 6$ vale 8.
- Si a **x** se le da el valor $\frac{1}{2}$, la expresión $2x + 6$ vale 7.
- Si a **x** se le da el valor -2, la expresión $2x + 6$ vale 2.

3. Igualdades. Identidades y ecuaciones

Igualdades.



Observa cada una de las siguientes frases y sus correspondientes expresiones simbólicas:

	Frases	Expresiones simbólicas
(A)	El triple de diez es treinta.	$3 \cdot 10 = 30$
(B)	Si del triple de un número se resta su doble queda el número dado.	$3x - 2x = x$
(C)	Si a un número se le resta 6 da 4.	$x - 6 = 4$

(A) $3 \cdot 10 = 30$ (B) $3x - 2x = x$ (C) $x - 6 = 4$

La igualdad (A) es una **igualdad numérica,** y las igualdades (B) y (C) son **igualdades literales,** y se llaman así porque en ellas intervienen expresiones algebraicas.

Identidad y ecuación.

IDENTIDAD: $3x - 2x = x$

	Primer miembro $3x - 2x$	Segundo miembro x	¿Es cierta la igualdad?
Si $x=1$	$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$	1	Sí
Si $x=2$	$3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2$	2	Sí
Si $x=3$	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3$	3	Sí

ECUACIÓN: $x - 6 = 4$

	Primer miembro $x - 6$	Segundo miembro 4	¿Es cierta la igualdad?
Si $x=1$	$1 - 6 = -5$	4	No
Si $x=2$	$2 - 6 = -4$	4	No
Si $x=3$	$3 - 6 = -3$	4	No
Si $x=10$	$10 - 6 = 4$	4	Sí

Observa que la igualdad literal $3x - 2x = x$ es cierta para cualquier valor que se dé a la letra **x,** es decir, el primer miembro y el segundo miembro toman el mismo valor para cualquier valor de **x**.

Estas igualdades literales que como $3x - 2x = x$ son ciertas para cualquier valor de **x** se llaman **identidades.**

Observa ahora las siguientes igualdades literales:

(D) $x - 6 = 4$ (E) $x^2 = 4$ (F) $0 \cdot x = 8$

Las igualdades literales (D), (E) y (F) no son ciertas para cualquier valor de **x**.

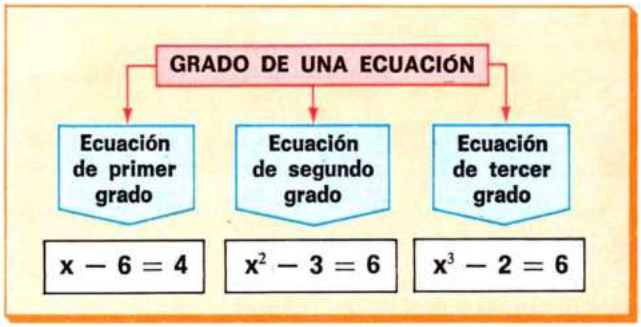
Estas igualdades literales se llaman **ecuaciones.**

- La ecuación (D) es cierta para un solo valor de **x**: $x = 10$.
- La ecuación (E) es cierta para dos valores de **x**: $x = 2$ y $x = -2$.
- La ecuación (F) no es cierta para ningún valor de **x** porque no hay ningún número que multiplicado por 0 dé 8.
- La letra o letras desconocidas de una ecuación se llaman **incógnitas**. En la ecuación $x - 6 = 4$ la incógnita es **x**.

Identidad es una igualdad literal que es cierta para cualquier valor de las letras.
Ecuación es una igualdad literal que no es cierta para cualquier valor de las letras.

4. Grado, soluciones y términos de una ecuación

Grado de una ecuación.



- La ecuación $x - 6 = 4$ es de **primer grado** porque la incógnita está elevada a 1.
- La ecuación $x^2 - 3 = 6$ se dice que es una ecuación de **segundo grado** porque la incógnita está elevada al cuadrado (2).
- La ecuación $x^3 - 2 = 6$ es de **tercer grado** porque la incógnita está elevada al cubo (3).

En este curso estudiarás las ecuaciones de primero y segundo grados con una sola incógnita.

Soluciones de una ecuación.

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $x^2 - 3 = 6$

	Primer miembro $x^2 - 3$	Segundo miembro 6	¿Es cierta la igualdad?
Si $x=2$	$2^2-3 = 1$	6	No
Si $x=3$	$3^2-3 = 6$	6	Sí
Si $x=-3$	$(-3)^2-3=6$	6	Sí
Si $x=4$	$4^2-3 = 13$	6	No

La ecuación de segundo grado $x^2 - 3 = 6$ sólo es cierta para $x = 3$ y para $x = -3$.

Los números 3 y -3 para los cuales la ecuación es una igualdad cierta se llaman **soluciones** de la ecuación.

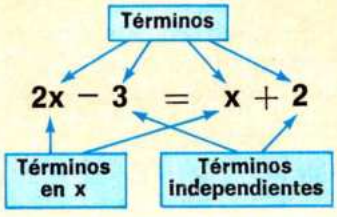
En general, una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, pero, como veremos más adelante, hay ecuaciones de segundo grado que sólo tienen una solución y otras que no tienen ninguna.

La ecuación $x - 6 = 4$ sólo se verifica si $x = 10$. Se dice que 10 es la solución de esta ecuación.

Una ecuación de primer grado tiene siempre una solución o no tiene ninguna.

Términos de una ecuación.

TÉRMINOS DE LA ECUACIÓN $2x - 3 = x + 2$



Observa esta ecuación de primer grado:

$$2x - 3 = x + 2$$

Las expresiones de cada miembro, $2x$, 3, x y 2, que están separadas por los signos más (+) y menos (−), se llaman **términos de la ecuación.**

Los términos $2x$ y x se llaman **términos en x**, y los términos -3 y 2, que no llevan x, se llaman **términos independientes.**

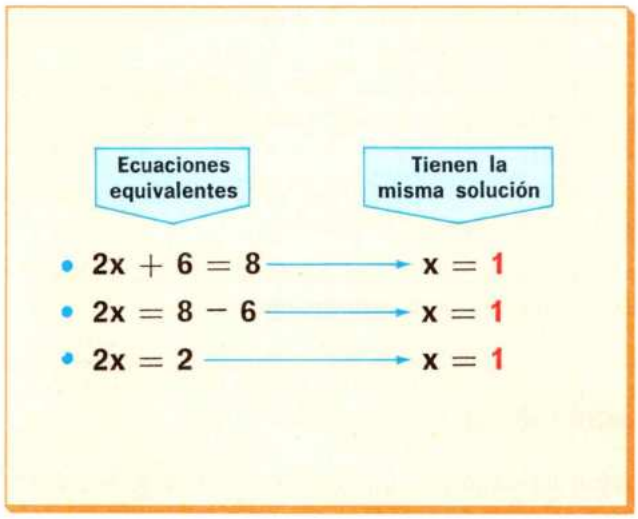
1. Observa las siguientes igualdades:

a) $x^3 - 1 = 7$ c) $x^2 = 25$ e) $20 = x^2 - 5$ g) $x^2 - 1 = 8$

b) $x + 7x = 8x$ d) $x + 6 = 8$ f) $2x - 6 = 4$ h) $2x - 3 = 5$

- Rodea el segundo miembro.
- Indica si es una identidad o una ecuación.
- En las ecuaciones, indica el grado.

5. Ecuaciones equivalentes. I



Ecuaciones equivalentes.

Observa estas ecuaciones:

$2x + 6 = 8$ $\qquad$ $2x = 8 - 6$ $\qquad$ $2x = 2$

Es fácil comprobar que las tres ecuaciones tienen la misma solución: $x = 1$.

Por eso se dice que estas ecuaciones son **ecuaciones equivalentes.**

Observa ahora estas dos ecuaciones:

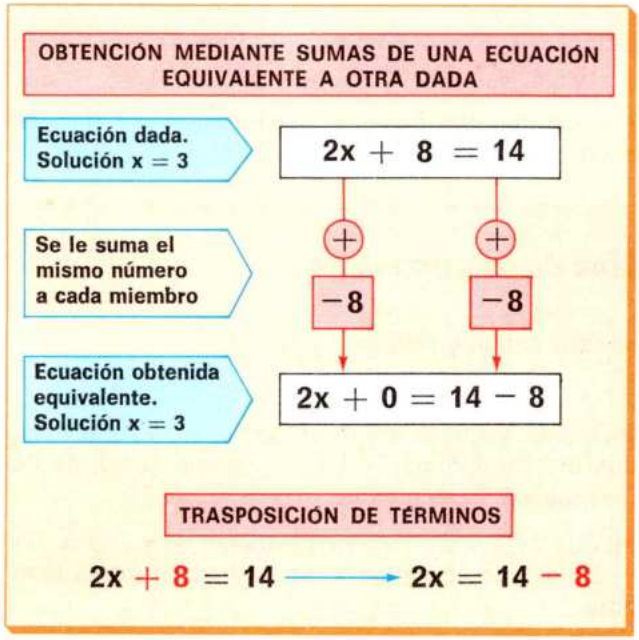
(A) $x^2 = 9$ y (B) $3x = 9$

La ecuación (A) tiene dos soluciones, $x = 3$ y $x = -3$; en cambio, la ecuación (B) sólo admite la solución $x = 3$.

Las ecuaciones (A) y (B) no son equivalentes.

Ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen las mismas soluciones.

Ecuaciones equivalentes por adición.



Considera la ecuación $2x + 8 = 14$, cuya solución es $x = 3$. Sumemos a los miembros de la ecuación el mismo número, por ejemplo, -8:

$2x+8+(-8) = 14+(-8) \longrightarrow 2x = 14-8 \longrightarrow 2x = 6$

La ecuación que resulta, $2x = 6$, tiene la misma solución ($x = 3$), y es por tanto equivalente a la primera.

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma un número cualquiera se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Se observa que el término $+8$ ha cambiado de miembro (ha pasado del primer miembro al segundo) y que a la vez ha cambiado de signo (ha cambiado de signo $+$ a signo $-$).

Esta operación recibe el nombre de **trasposición de términos.**

Todo término se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

1. **Resuelve las ecuaciones siguientes sumando a los dos miembros el número que se indica:**

a) $x + 9 = 5$ → Suma -9.

b) $x - 10 = 15$ → Suma 10.

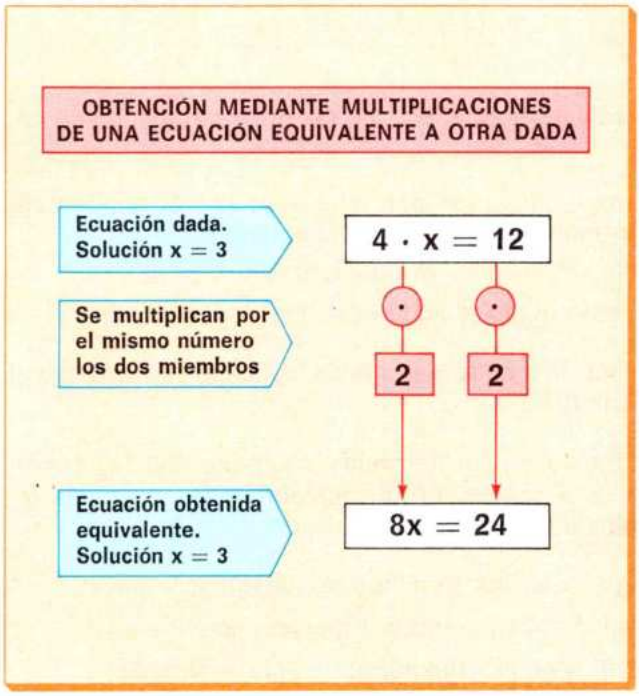
c) $x + 16 = 100$ → Suma -16.

d) $x + 18 = 26$ → Suma -18.

e) $x + 60 = 80$ → Suma -60.

f) $x - 40 = 74$ → Suma 40.

6. Ecuaciones equivalentes. II



Ecuaciones equivalentes por multiplicación.

Consideremos la ecuación $4x = 12$, cuya solución es $x = 3$.

Multipliquemos los dos miembros de la ecuación por un número cualquiera distinto de cero, por ejemplo por 2:

$$4x = 12 \longrightarrow 2 \cdot 4x = 2 \cdot 12 \longrightarrow 8x = 24$$

La ecuación que resulta ($8x = 24$) tiene la misma solución ($x = 3$), y por tanto es equivalente a la ecuación $4x = 12$, que tiene también por solución $x = 3$.

En la práctica, dada la ecuación $4x = 12$, en lugar de multiplicar por 2 multiplicaremos por $\frac{1}{4}$, que es inverso de 4. De este modo quedará despejada la **x**:

$$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12 \longrightarrow 1 \cdot x = \frac{12}{4} \longrightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

Observa que el número 4 pasa de ser factor en el primer miembro de la ecuación ($4x = 12$) a ser divisor en el segundo miembro de $x = \frac{12}{4}$

Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por un número cualquiera distinto de cero se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

1. Resuelve la ecuación:

a) $x - 7 = 1$
b) $x + 8 = 12$
c) $7x = -63 \longrightarrow x = \frac{-63}{7}$
d) $9x = 90$
e) $15x = 60$
f) $7x = 49$
g) $x - 12 = 26$
h) $x + 15 = 48$
i) $2x - 3 = 11$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones en las que a, b, c y d son constantes.

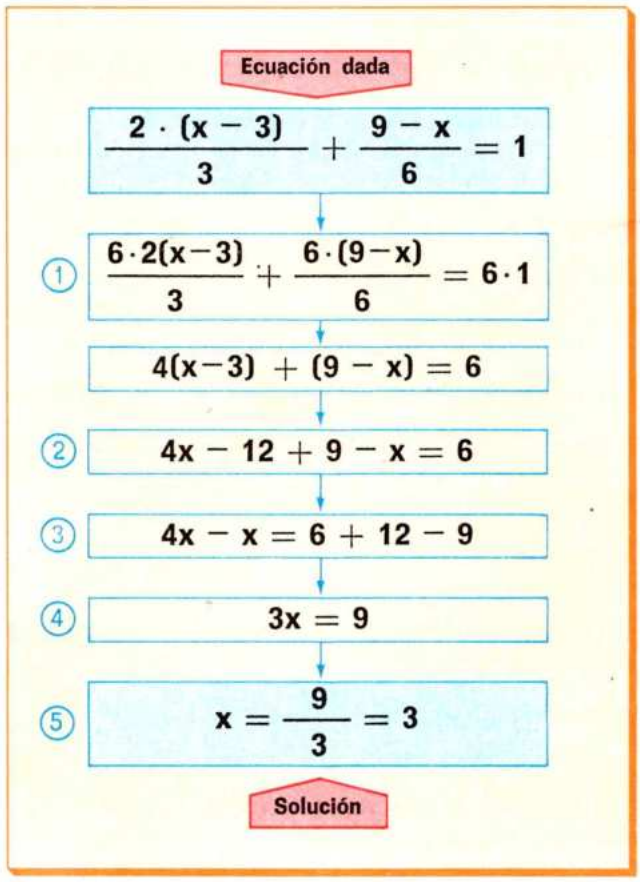
a) $a + x = b \longrightarrow x = \ldots$
b) $ax = b \quad (a \neq 0)$
c) $2x + 7 = 13$
d) $ax + b = c$
e) $-4x + 30 = 18$
f) $6x - 4 = 3x + 2$
g) $ax + b = cx + d$
h) $2x - 7 = 3x - 8$

3. Resuelve:

Si la ecuación tiene paréntesis se realizan primero las operaciones.

a) $3 \cdot (6 + x) = 2 \cdot (x - 6) \Rightarrow 18 + 3x = 2x - 12 \longrightarrow 3x - 2x = -12 - 18 \longrightarrow x = -30$
b) $9 \cdot (x - 1) = 6 \cdot (x + 3)$
c) $12 - (x - 3) = 6$
d) $16 \cdot (x - 2) = 24 \cdot (x - 3)$
e) $3 \cdot (x + 1) - 5 = 2x + 1$
f) $2(x - 7) = -4(x - 1)$
g) $2 \cdot (5 + x) = 6x + 2$
h) $8 - (4 - x) = 9$
i) $7 - (2x - 3) = 2$

7. Ejemplos de resolución de ecuaciones de coeficientes racionales



Ecuaciones con denominadores.

Sea la siguiente ecuación:

$$\frac{2\cdot(x-3)}{3}+\frac{9-x}{6}=1$$

Para resolver esta ecuación se procede del modo siguiente:

① Se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\text{m.c.m.}(3,6)=6$$

De este modo desaparecen los denominadores.

② Se suprimen los paréntesis aplicando la propiedad distributiva.

③ Se trasponen los términos de forma que los términos en **x** queden en un miembro y los términos independientes queden en el otro.

④ Se reducen los términos semejantes:

En el primer miembro: $4x-x=3x$.

En el segundo miembro: $6+12-9=9$.

⑤ Finalmente se despeja la incógnita:

$$x=\frac{9}{3}=3$$

1. Resuelve:

a) $\frac{x}{3}=6$ d) $\frac{-x}{6}=4$ g) $\frac{x-2}{3}=6$

b) $\frac{x}{7}=12$ e) $\frac{-x}{2}+3=8$ h) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-1}{6}=1$

c) $\frac{-x}{2}=16$ f) $\frac{x}{3}+5=2x-15$ i) $\frac{3x}{6}-\frac{x+6}{3}=-2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{10}-\frac{x-3}{6}=0$ e) $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{4}=1$

b) $\frac{x+2}{9}-\frac{x-1}{3}=-1$ f) $\frac{x+1}{5}-\frac{x+3}{6}=0$

c) $x-\frac{x+1}{2}=3$ g) $\frac{x-2}{6}-\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{2}=0$

d) $\frac{x}{3}+\frac{x+2}{4}-\frac{x+3}{9}=3$ h) $\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{6}+\frac{x+3}{5}=2$

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

Resuelve las siguientes ecuaciones:

① $x + 3 = 10$	⑤ $x + 1 = 9$	⑨ $x - 10 = 20$	⑬ $4x = -12$
② $x - 6 = 4$	⑥ $x - 2 = 6$	⑩ $x - 10 = 30$	⑭ $-2x = 8$
③ $3x = 9$	⑦ $5x = 100$	⑪ $-x = 6$	⑮ $-6x = 18$
④ $5x = 20$	⑧ $6x = 54$	⑫ $-x = 8$	⑯ $-3x = -15$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x+5}{2} = \frac{2x+3}{3}$

b) $\frac{2x-1}{3} = \frac{4x+2}{5}$

c) $\frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$

d) $\frac{2x}{1} + \frac{x+2}{8} = \frac{x+7}{1}$

e) $\frac{2x+1}{15} - \frac{x+2}{9} = 0$

f) $\frac{3x+2}{5} - 7 = 2x - \frac{x+1}{2}$

2. Comprueba que las ecuaciones $3x + 4 = 19$ y $3x = 15$ son equivalentes. ¿Qué número se ha sumado a los dos miembros de la primera ecuación para obtener la segunda?

3. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x = 6$ por adición y otras tres por multiplicación.

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x+11}{6} - \frac{x+5}{3} = 0$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 5$

c) $\frac{x+6}{10} - \frac{x+2}{3} = -1$

d) $\frac{x-2}{3} = 10 - \frac{3(1-x)}{2}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones indicando cada paso que das:

a) $\frac{7-x}{3} = \frac{13-x}{6}$

b) $\frac{2(x+3)}{5} - \frac{4-x}{2} = 1$

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{3x}{7} = x - 8$

d) $\frac{x+2}{8} - \frac{x-2}{4} = 0$

e) $\frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$

f) $\frac{3x+1}{5} - \frac{x+1}{4} = 1$

6. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{-5}{7}$

b) $\frac{x-2}{3} = \frac{-116}{7} + \frac{3(1-x)}{2}$

c) $\frac{x+6}{10} + \frac{x+2}{3} = 3$

d) $\frac{3-x}{6} - \frac{x}{2} = \frac{1-x}{5} + \frac{2-x}{3}$

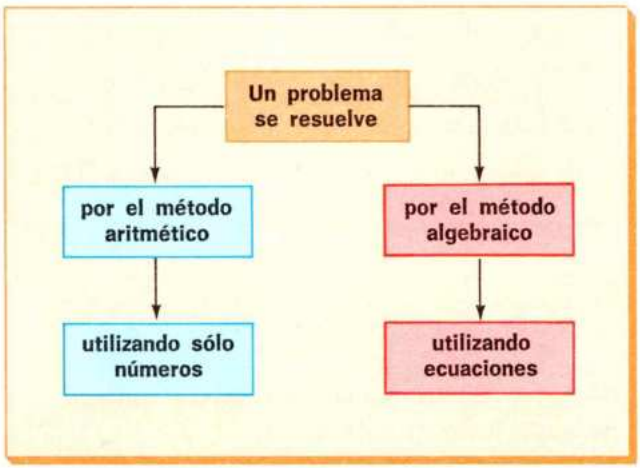
e) $\frac{2x-31}{6} = \frac{x-3}{4}$

f) $\frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{-5}{2}$

g) $\frac{x+1}{8} - \frac{x-1}{6} - \frac{x+3}{5} = -2$

TEMA 11 PROBLEMAS DE PRIMER GRADO

1. Método algebraico para la resolución de problemas. I



Método aritmético y método algebraico.

Cuando un problema se resuelve utilizando sólo números se dice que se emplea el **método aritmético.**

Cuando un problema se resuelve utilizando ecuaciones se dice que se emplea el **método algebraico.**

Los problemas de este tema se resuelven utilizando ecuaciones de primer grado; por eso se llaman problemas de **primer grado.**

EJEMPLO 1

Eva se gastó los $\frac{3}{4}$ del dinero que tenía y después $\frac{1}{3}$ de lo que le restaba. Al final le quedaron 100 ptas.

¿Cuánto dinero tenía Eva?

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA POR EL MÉTODO ARITMÉTICO

- 1 → cantidad que tenía Eva.
- Gastó $\frac{3}{4}$ y le quedó: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- Después gastó: $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
- Total gastado: $\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} + \frac{1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
- De 6 partes iguales del dinero, Eva se gastó 5 partes. Le quedó una parte que equivale a 100 ptas. Luego Eva tenía $100 \times 6 =$ **600 ptas.**

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA POR EL MÉTODO ALGEBRAICO

- $\mathbf{x}$ → cantidad que tenía Eva.
- Gastó $\frac{3}{4}\mathbf{x}$ y le quedó: $\mathbf{x} - \frac{3\mathbf{x}}{4} = \frac{\mathbf{x}}{4}$
- Después gastó: $\frac{1}{3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{4} = \frac{\mathbf{x}}{12}$
- Total gastado: $\frac{3\mathbf{x}}{4} + \frac{\mathbf{x}}{12} = \frac{9\mathbf{x}}{12} + \frac{\mathbf{x}}{12} = \frac{10\mathbf{x}}{12}$
- Le quedó a Eva: $\mathbf{x} - \frac{10\mathbf{x}}{12} = \frac{12\mathbf{x}}{12} - \frac{10\mathbf{x}}{12} = \frac{2\mathbf{x}}{12}$
- Como lo que le quedó son 100 ptas. resulta: $\frac{2\mathbf{x}}{12} = 100 \Rightarrow 2\mathbf{x} = 1.200 \rightarrow \mathbf{x} = 600$ **ptas.**

Eva tenía 600 ptas.

MÉTODO ALGEBRAICO

Número que hay que sumar al numerador y al denominador de $\frac{1}{4}$ → $\mathbf{x}$ ⇒ $\frac{1+\mathbf{x}}{4+\mathbf{x}}$

Ecuación → $\frac{1+\mathbf{x}}{4+\mathbf{x}} = \frac{3}{4}$

$4 + 4\mathbf{x} = 12 + 3\mathbf{x} \rightarrow 4\mathbf{x} - 3\mathbf{x} = 12 - 4$

Solución → $\mathbf{x} = 8$

EJEMPLO 2

Hay muchos problemas para los cuales el método aritmético no es el adecuado porque se reduce a una serie de comprobaciones sin garantía de que la solución se va a encontrar. En problemas como éstos se aplica el método algebraico.

Veamos un caso:

¿Qué número hay que sumar al numerador y al denominador de la fracción $\frac{1}{4}$ para que resulte una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$?

Observa cómo se resuelve este problema utilizando el método algebraico. Así resulta la solución $\mathbf{x} = 8$.

2. Método algebraico para la resolución de problemas. II

FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA POR EL MÉTODO ALGEBRAICO

① Planteamiento del problema mediante una ecuación

② Resolución de la ecuación

③ Comprobación o discusión de la solución

Planteamiento, resolución y comprobación.

Para resolver un problema por el método algebraico se siguen los siguientes pasos:

① **Planteamiento.** Plantear un problema consiste en expresar en una ecuación o en varias ecuaciones las condiciones contenidas en el enunciado.

El valor desconocido en el problema se llama **incógnita** y se designa por una letra cualquiera (**x**, **y**, **z**, **t**, ...).

② **Resolución.** Si la ecuación que resulta en el planteamiento es de primer grado se resuelve en la forma que ya conocemos.

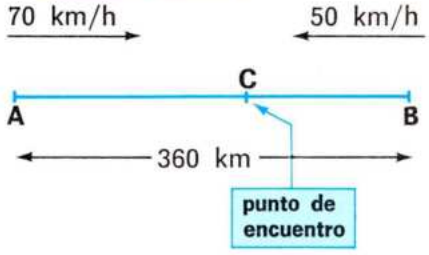
③ **Comprobación o discusión.** Consiste en comprobar si la solución encontrada al resolver la ecuación verifica las condiciones contenidas en el enunciado.

Ejemplo

Dos ciudades A y B distan entre sí 360 km. A las 5 de la tarde sale un coche de la ciudad A a la ciudad B con una velocidad media de 70 km/h. A la misma hora sale un camión de la ciudad B hacia A con una velocidad de 50 km/h.

¿A qué hora se encuentran los coches?

① PLANTEAMIENTO



$\overbrace{AC} + \overbrace{CB} = 360$

$70 \cdot t + 50 \cdot t = 360$

② RESOLUCIÓN

Ecuación: $70t + 50t = 360$

$120t = 360$

$t = \frac{360}{120} = 3$ horas

Tardan en encontrarse 3 horas.

Se encuentran a las
$3 + 5 = \mathbf{8}$ **de la tarde.**

③ COMPROBACIÓN

El coche ha recorrido.
$70 \times 3 = 210$ km

El camión ha recorrido:
$50 \times 3 = 150$ km

Se comprueba que:
$210 \text{ km} + 150 \text{ km} = 360 \text{ km}$

Los dos coches se encuentran a las 8 de la tarde.

1. Resuelve este problema:

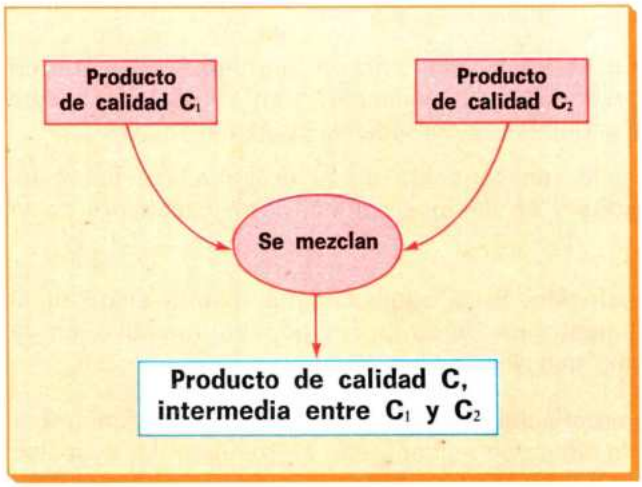
Dos ciudades A y B distan 720 km. A las 4 de la mañana sale un coche de la ciudad A a la ciudad B con una velocidad media de 110 km/h. A la misma hora sale un camión de la ciudad B hacia la ciudad A con una velocidad de 70 km/h

¿A qué hora se encuentran?

¿A qué distancia de las ciudades A y B se encuentran los dos vehículos?

3. Problemas sobre mezclas y aleaciones. I

Cómo se resuelven con ecuaciones problemas sobre mezclas.



Frecuentemente existen en el mercado productos de la misma clase pero de calidad y precios diferentes.

En ocasiones tiene interés mezclar dos calidades de un mismo producto con el fin de obtener un producto de calidad intermedia y cuyo precio esté comprendido entre los precios de los productos mezclados.

Ejemplo

Un comerciante tiene dos clases de café, la primera de 600 ptas. el kg y la segunda de 720 ptas. el kg.

¿Cuántos kilos hay que poner de cada clase de café para obtener 60 kg de mezcla a 700 ptas. el kg?

① PLANTEAMIENTO

	Primera clase a 600 ptas. kg	Segunda clase a 720 ptas. kg
Número de kilos	x	$60 - x$
Valor del café	$600 \cdot x$	$720 \cdot (60 - x)$
Valor total de los 60 kg de mezcla	$600x + 720(60 - x)$	

Precio de 1 kg de café de la mezcla, obtenido dividiendo el valor total de la mezcla por el número total de kilos.

$$\frac{600x + 720(60 - x)}{60} = 700$$

Precio de 1 kg de café de la mezcla, conocido por el enunciado.

② RESOLUCIÓN

a) Para resolver la ecuación anterior eliminamos los denominadores multiplicando los dos miembros por 60:

$$600x + 720(60 - x) = 60 \times 700 = 42.000$$

b) Eliminamos los paréntesis realizando las operaciones indicadas:

$$600x + 43.200 - 720x = 42.000$$

c) Hacemos la trasposición de términos:

$$600x - 720x = 42.000 - 43.200$$

d) Reducimos los términos semejantes:

$$-120x = -1.200$$

e) Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{-1200}{-120} = 10$$

Primera clase

$x = 10$ **kg**

Segunda clase

$60 - x = 60 - 10 = 50$ **kg**

③ COMPROBACIÓN

10 kg de la primera clase y $60 - 10 = 50$ kg de la segunda.

10 kg de la primera clase de café valen $10 \times 600 = 6.000$ ptas.

50 kg de la segunda clase de café valen $50 \times 720 = 36.000$ ptas.

Los 60 kg de mezcla valen 42.000 ptas. y cada kilo vale $\frac{42000}{60} = 700$ ptas.

Esta comprobación nos confirma que el problema está bien resuelto.

Hay que poner 10 kg de café de la primera clase y 50 kg de café de la segunda clase.

4. Problemas sobre mezclas y aleaciones. II

Cómo se resuelven con ecuaciones problemas de aleaciones.

LEY DE UNA ALEACIÓN

$$\text{Ley} = \frac{\text{metal fino}}{\text{metal total}}$$

La mezcla de dos o más metales se llama **aleación.**

El metal de mayor valor se llama **metal fino.**

El metal fino que contiene una aleación se mide por un número llamado **ley.** Este número indica la cantidad de metal fino que hay en cada 1.000 gramos de mezcla; así, por ejemplo, un anillo de oro de ley 0,750 quiere decir que en cada 1.000 gramos de aleación hay 750 gramos de oro puro.

Los problemas de aleaciones se resuelven igual que los de las mezclas.

Ejemplo

Se tienen dos lingotes de oro, uno de ley 0,750 y otro de ley 0,950.

¿Qué peso hay que tomar de cada lingote para obtener 1.800 g de aleación de oro de ley 0,900?

① **PLANTEAMIENTO**

	Oro de 0,750	Oro de 0,950
Cantidad que se tiene de cada lingote	x	$1.800 - x$
Cantidad de oro puro que hay en la parte tomada de cada lingote	$0{,}750 \cdot x$	$0{,}950(1.800 - x)$

$$0{,}750 \cdot x + 0{,}950(1.800 - x) = \boxed{0{,}900 \cdot 1.800}$$

Cantidad total de oro del lingote de 1.800 g

② **RESOLUCIÓN**

$$0{,}750x + 1.710 - 0{,}950x = 1.620 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}750x - 0{,}950x = 1.620 - 1.710$$

$$-0{,}2x = -90 \longrightarrow x = \frac{-90}{-0{,}2} \longrightarrow x = 450$$

Hay que tomar:

- **450** gramos de oro de ley 0,75.
- **1.350** gramos de oro de ley 0,950.

Hay que tomar 450 gramos de oro de ley 0,750 y 1.350 gramos de oro de ley 0,950.

1. Haz la comprobación del problema planteado y resuelto en esta página.

2. Resuelve estos problemas:

A. Un lingote de oro de ley 0,950 pesa 6.300 g.
¿Qué cantidad de cobre puro se habrá de añadir para rebajar su ley a 0,900?

B. Se funden dos lingotes de plata, uno de 2 kg de peso y de ley 0,6 y otro de 3 kg de peso y de ley 0,850.
¿Cuál será la ley del nuevo lingote?

Cómo se resuelven con ecuaciones algunos problemas sobre relojes.

En los problemas sobre relojes hay que tener en cuenta el ángulo o arco descrito por las manecillas o agujas del reloj: el arco que recorre el minutero es siempre 12 veces mayor que el arco que describe el horario.

PROBLEMA 1

Un reloj marca las 3 en punto.

¿A qué hora entre las 3 y las 4 se superpondrán las manecillas?

Observa en las figuras que las manecillas se superpondrán a las 3 horas, 15 minutos y algo más.

Ese algo más le llamamos **x**, y es el arco que describe el horario.

Si **x** es el arco que describe el horario, $15 + x$ será el arco que describe el minutero.

Como el arco que describe el minutero es 12 veces mayor que el arco que describe el horario, resulta la siguiente ecuación: $15 + x = 12x$.

Observa en la resolución que $x = 1$ min 21 s y $\frac{9}{11}$ de segundo.

Las agujas se superpondrán a las 3 h 16 min 21 s y $\frac{9}{11}$ de segundo.

PROBLEMA 2

Un reloj marca las 2 en punto.

¿A qué hora formarán por primera vez un ángulo recto sus agujas?

Observa que las manecillas del reloj forman un ángulo recto a las 2 h 25 min y algo más.

Ese algo más le llamamos **x**, y es el arco que describe el horario.

Observa en la figura que el minutero, para formar ángulo recto, debe recorrer $x + 25$.

Como el camino que recorre el minutero es 12 veces el del horario en el mismo tiempo, resulta la ecuación

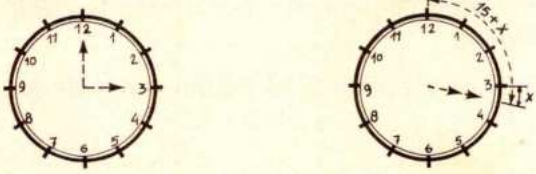
$$12x = x + 25$$

Las manecillas formarán ángulo recto a las 2 h 27 min 16 s y $\frac{4}{11}$ de segundo.

PROBLEMA 1

Posición de las manecillas a las 3 en punto

Posición de las manecillas a la hora en que coinciden



Ecuación $15 + x = 12x$

Resolución $11x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{11}$

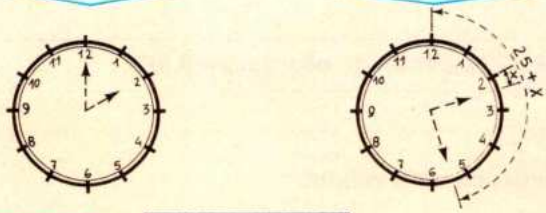
15 min | 11
4 min = | 1 min 21 s
= (4 × 60) s =
240 s
20
9 s

Solución $x = 1$ min 21 s y $\frac{9}{11}$ de segundo

PROBLEMA 2

Posición de las manecillas a las 2 en punto

Posición cuando las manecillas forman ángulo recto



Ecuación $12x = x + 25$

Resolución $11x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{11}$

Solución $x = 2$ min 16 s y $\frac{4}{11}$ de segundo

6. Otros problemas

PROBLEMA 1

Luis preguntó a su primo Juan cuántos años tenía, y Juan le contestó: «Si al triple de los años que tendré dentro de tres años le restas el triple de los años que tenía hace tres años, tendrás los años que tengo ahora.»

¿Cuántos años tiene Juan?

① PLANTEAMIENTO

Si llamamos **x** a los años que tiene ahora Juan:

- $x + 3$ serán los años que tendrá dentro de tres años.
- $x - 3$ eran los años que tenía hace tres años.

Ecuación:

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$$

② RESOLUCIÓN

En la ecuación

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$$

realizamos las operaciones indicadas:

$$3x + 9 - 3x + 9 = x$$

$$18 = x$$

Juan tiene **18 años.**

③ COMPROBACIÓN

- 3 veces los años que Juan tendrá dentro de tres años:

$$3 \times 21 = 63$$

- 3 veces los años que tenía hace tres años:

$$3 \times 15 = 45$$

- Edad que tiene: $63 - 45 = \mathbf{18}$.

Juan tiene 18 años.

PROBLEMA 2

Los 65 viajeros de un avión pertenecen a cuatro países. Colocados en orden decreciente el número de viajeros que corresponde a cada país, México (M), Venezuela (V), Argentina (A) y España (E), cada uno de ellos es $\frac{2}{3}$ *del anterior.*

¿Cuántos viajeros van de cada país?

① PLANTEAMIENTO

- Designamos por **M**, **V**, **A** y **E** las cuatro nacionalidades que van representadas en el avión.
- Si se designa por **x** el número de viajeros de **M** se tiene:

$$\mathbf{M} \longrightarrow x$$

$$\mathbf{V} \longrightarrow \frac{2}{3}x$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{4}{9}x$$

$$\mathbf{E} \longrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{8}{27}x$$

Como en total hay 65 viajeros, resulta la ecuación:

$$\underset{\downarrow}{M} + \underset{\downarrow}{V} + \underset{\downarrow}{A} + \underset{\downarrow}{E} = 65$$

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x + \frac{8}{27}x = 65$$

② RESOLUCIÓN

Ecuación:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x + \frac{8}{27}x = 65$$

Para resolver esta ecuación multiplicamos por 27 los dos miembros [27 = m.c.m. (3, 9, 27)]:

$$27x + 18x + 12x + 8x = 65 \cdot 27$$

$$65x = 65 \cdot 27$$

$$x = \frac{65 \cdot 27}{65} = 27$$

③ COMPROBACIÓN

De **M** van 27 viajeros.

De **V** van $\frac{2}{3} \cdot 27 = 18$ viajeros.

De **A** van $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$ viajeros.

De **E** van $\frac{2}{3} \cdot 12 = \frac{24}{3} =$ $= 8$ viajeros.

$27 + 18 + 12 + 8 = 65$

De México van 27 viajeros; de Venezuela, 18; de Argentina, 12; de España, 8.

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

Di cuál es la ecuación correspondiente y contesta:

① La tercera parte de un número es 9. ¿Cuál es ese número?

② La quinta parte de mi dinero son 12 ptas. ¿Cuánto tengo?

③ Los $\frac{2}{3}$ de un número es 20. ¿Cuál es el número?

④ Los $\frac{2}{5}$ de un número es 40. ¿Cuál es ese número?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos.

¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si hay un total de 96 personas?

2. Se han consumido $\frac{7}{8}$ de un bidón de aceite. Reponemos 38 litros y el bidón ha quedado lleno hasta sus $\frac{3}{5}$ partes.

Calcula la capacidad del bidón.

3. Antonio dice a Juan: «El dinero que tengo es el doble del que tienes tú», y Juan contesta: «Si tú me das seis pesetas, tendremos los dos igual cantidad».

¿Cuánto dinero tiene cada uno?

4. ¿Cuántos litros de aceite de 120 ptas. el litro hay que mezclar con aceite de 180 pesetas el litro para obtener 600 litros al precio de 140 ptas. el litro?

Problemas de móviles:

Recuerda los problemas de móviles estudiados el curso pasado. Hay dos tipos fundamentales, según que tengan o no el mismo sentido.

5. Un tren circula a 90 km/h y otro que va en sentido contrario lleva una velocidad de 110 km/h. En un momento dado se encuentran a 400 km de distancia.

¿Cuánto tiempo tarda en producirse el cruce de ambos trenes?

6. Un automóvil lleva en el depósito al salir de viaje una cantidad de gasolina. El viaje lo hace en dos etapas. En la primera consume $\frac{1}{5}$ de la gasolina y en la segunda consume $\frac{1}{4}$ de la que le quedaba, llegando al final del trayecto con 30 litros.

¿Con cuántos litros emprendió el viaje?

7. De una ciudad A sale un camión con una velocidad de 60 km/h.

Tres horas después sale un coche que persigue al camión.

Si la velocidad del coche es de 90 km/h ¿cuánto tiempo tarda en alcanzar al camión?

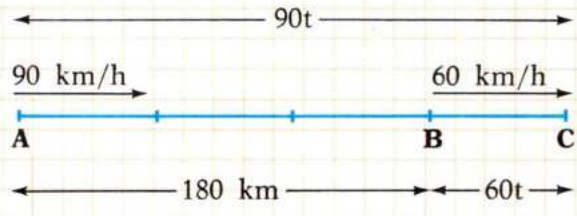
¿A qué distancia de la ciudad A alcanza el coche al camión?

Al cabo de 3 horas el camión se encuentra en B.

C es el punto de encuentro.

Observa en la figura que **AC = AB + BC**.

Con esta relación escribe el planteamiento.



CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Escribe un número cualquiera de tres cifras.

Escribe el mismo número al lado del primero. El nuevo número formado tiene seis cifras.

La curiosidad que presenta el número formado la apreciarás al dividir el número de seis cifras primero por 7, el cociente por 11 y el nuevo cociente por 13.

¿Cómo explicas este hecho?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un padre reparte una finca entre sus tres hijos. Al hijo mayor le asigna la tercera parte de la finca más 80 ha, al segundo la cuarta parte más 20 ha y al tercero la cuarta parte.

¿Cuál será la extensión de la finca?

¿Qué parte de finca corresponderá a cada hijo?

2. Un poste tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su longitud y la parte emergente mide 8 metros.

¿Cuál será la longitud del poste?

3. Un comerciante ha vendido 18 artículos de clase A y 13 artículos de clase B por 15.120 ptas.

¿Cuál es el precio de cada artículo, sabiendo que un artículo de clase B cuesta 3 veces más que un artículo de clase A?

4. Un señor hizo un viaje en coche, en el cual consumió 20 litros de gasolina. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió $\frac{2}{3}$ de la gasolina que tenía en el depósito y en la segunda etapa, la mitad de la gasolina que le quedaba.

¿Cuántos litros de gasolina tenía el depósito?

¿Cuántos litros consumió en cada etapa?

¿Cuántos kilómetros recorrió en cada etapa, si el coche consume 5 litros de gasolina a los 100 km?

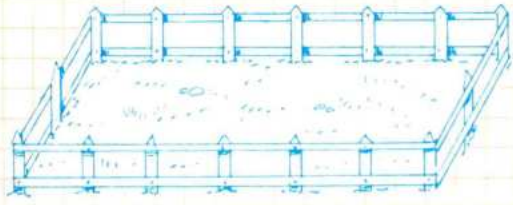
5. Una señora sale a comprar con 4.000 pesetas y vuelve a casa con 850 ptas. Sabiendo que en la carnicería gastó el doble que en la pescadería y en la frutería gastó 500 ptas. menos que en la carnicería ¿cuánto gastó en cada tienda?

6. Tres amigos, A, B y C, compran en el mercado aceite por valor de 9.800 ptas. B se lleva el doble de aceite que A y C se lleva el doble que B.

¿Qué cantidad debe pagar cada uno?

7. La valla que rodea un campo rectangular mide 3.200 metros.

¿Cuáles son las dimensiones del campo si su largo es triple que su ancho?



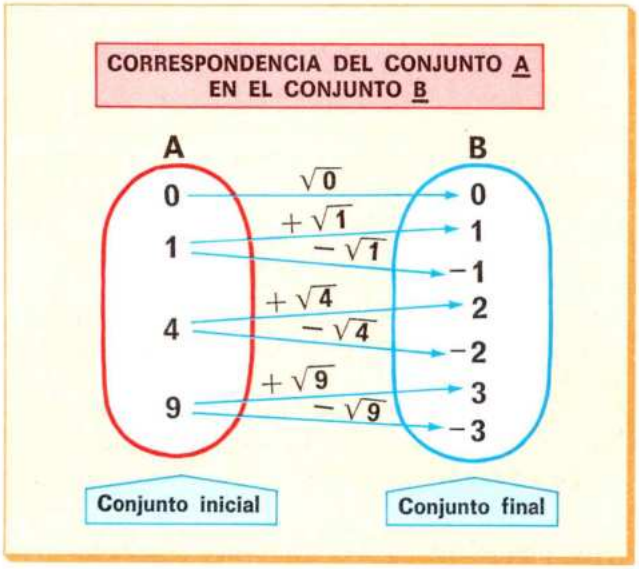
8. Se reparte la cantidad de 150.000 ptas. entre tres personas, A, B y C, de modo que entre A y B cobren conjuntamente el doble de lo que cobra C y que A cobre 20.000 pesetas más que B.

¿Cuánto recibe cada persona?

9. Dos amigos se encuentran a 30 km de distancia. Los dos recorren el camino que les separa en sentido contrario. Uno va con velocidad de 6 km por hora y el otro a 4 km por hora.

¿Cuándo se encontrarán?

1. Idea de función



Conjunto inicial y conjunto final de una correspondencia.

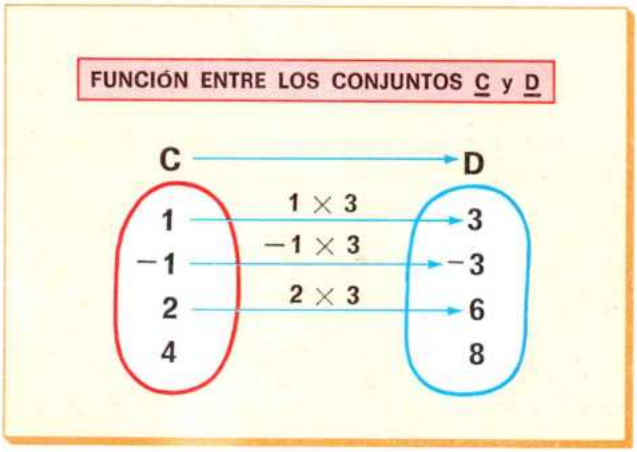
Consideremos la correspondencia del conjunto **A** en el conjunto **B**:

$\mathbf{A} = \{0, 1, 4, 9\}$ $\mathbf{B} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$

El criterio de esta correspondencia es: «A cada número del conjunto **A** se le asocian sus raíces cuadradas.»

Observa en el diagrama de flechas de esta correspondencia que:

- El conjunto **A** es el **conjunto inicial** o de **partida.**
- El conjunto **B** es el **conjunto final** o de **llegada.**
- El **grafo** o conjunto de pares de esta correspondencia es: $\{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3)\}$
- El 4 está asociado al 2 y al -2, y esto significa que el 4 tiene dos imágenes. Del mismo modo, el 9 tiene dos imágenes, 3 y -3. Por eso esta correspondencia entre el conjunto **A** y el conjunto **B** no es aplicación.



Concepto de función.

Considera la correspondencia del conjunto **C** en el conjunto **D**:

$\mathbf{C} = \{1, -1, 2, 4\}$ $\mathbf{D} = \{3, -3, 6, 8\}$

Esta correspondencia se ha establecido con el criterio «multiplicar por 3»: $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, $\mathbf{x} \longrightarrow 3 \cdot \mathbf{x}$

Observa en el diagrama de flechas que no hay ningún número de **C** que tenga dos imágenes; por ello se dice que la correspondencia del conjunto **C** en el conjunto **D** es una **función.**

Pero como el 4 no tiene imagen, esta correspondencia no es una aplicación.

Una función entre dos conjuntos numéricos es una correspondencia tal que no hay ningún número que tenga más de una imagen.

1. Considera la correspondencia de $\mathbf{A} = \{1, -1, 2, 3, 4\}$ en $\mathbf{B} = \{5, 3, 6, 7, 9\}$ establecida con el criterio «sumar 4»:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{sumar 4}} \mathbf{B}$$
$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} + 4$$

a) Traza su diagrama de flechas. ¿Cuál es la imagen de 1? ¿Y la de 3?

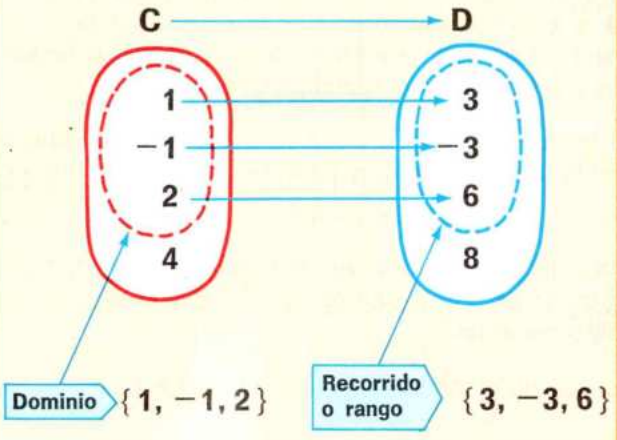
b) ¿Hay algún elemento de **A** que tenga más de una imagen?

c) ¿Es esta correspondencia una función?

2. Dominio, recorrido y ecuación de una función

Dominio y recorrido o rango de una función.

DOMINIO Y RECORRIDO DE LA FUNCIÓN f



Llamemos **f** a la función del conjunto **C** en el conjunto **D**:

$$C = \{1, -1, 2, 4\} \qquad D = \{3, -3, 6, 8\}$$

$$C \xrightarrow{\ f\ } D$$

$$x \longrightarrow 3 \cdot x$$

La imagen de 1 es 3. También se dice que 1 es el original o antiimagen de 3.

Para expresar que la imagen de 1 mediante la función **f** es 3 se escribe $f(1) = 3$ y se lee **«f de 1 es igual a 3»**.

El conjunto formado por los elementos que tienen imagen se llama **dominio de la función** o **conjunto original.**

Dominio de $f = \{-1, 1, 2\}$

El conjunto formado por los elementos imágenes se llama **conjunto imagen, recorrido** o **rango** de la función.

Dominio de una función es el conjunto formado por los elementos que tienen imagen.
Recorrido o rango de una función es el conjunto formado por las imágenes.

Ecuación de una función. Variables.

ECUACIÓN DE LA FUNCIÓN f

Primera forma $f(x) = x + 3$

Segunda forma $y = x + 3$

TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN f

x	$y = x + 3$
0	3
−1	2
−2	1
−3	0
1	4
2	5
⋮	⋮

Variable independiente: x — Variable dependiente: y

Consideremos la función $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ de variable entera definida por la igualdad $f(x) = x + 3$.

La igualdad $f(x) = x + 3$ se llama **ecuación de la función.** En ocasiones la imagen de **x**, es decir, **f(x)**, se designa por **y**. Con esta notación la ecuación de la función **f** se escribe así: $y = x + 3$.

La letra **x** representa cualquier número del dominio de la función. En el caso de la función $y = x + 3$, la letra **x** representa cualquier número entero y se llama **variable independiente.**

Los valores que toma la letra **y** dependen de los valores que toma la letra **x**, y por eso la letra **y** se llama **variable dependiente.**

Las operaciones que hay que hacer con la variable independiente **x** para obtener su imagen **y** vienen expresadas por la **ecuación de la función.**

Observa, ordenados en una tabla, algunos valores de **x** y de **f(x)**.

Se llama ecuación de una función a la relación que indica las operaciones que hay que hacer con la variable independiente x para obtener la variable dependiente y.

3. Funciones de variable racional. Cálculo de la antiimagen

Funciones de variable racional.

FUNCIÓN DE VARIABLE ENTERA

$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f(x) = x + 3$

$y = x + 3$

FUNCIÓN DE VARIABLE RACIONAL

$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$g(x) = 3x^2$

TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN g

x	−3	−2	1	2	...
g(x)	27	12	3	12	...

En la función $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por la ecuación $f(x) = x + 3$, los valores que puede tomar la variable independiente son números enteros; por eso la función **f** es una función de **variable entera.**

Observa la función $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por el criterio «elevar al cuadrado y después multiplicar por 3»:

$$g(x) = 3x^2$$

El dominio de la función **g** es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, y por eso la función **g** es una función de **variable racional.**

Observa una tabla de valores de la función **g.**

Se llama función de variable racional a toda función cuyo dominio es una parte no vacía del conjunto de los números racionales.

Cálculo de la antiimagen de un número mediante una función.

CÁLCULO DE LA ANTIIMAGEN

Función dada $y = 3x + 7$

¿Cuál es la antiimagen de 1?

$3x + 7 = 1$

$3x = 1 - 7 = -6$

$x = \dfrac{-6}{3} = \boxed{-2}$ **Solución**

Dada la función de variable racional $f(x) = 3x + 7$, o bien $y = 3x + 7$ ¿cuál es la antiimagen de 1? Es decir, ¿cuánto vale **x** si $f(x) = 1$?

Para averiguarlo hay que calcular el valor de **x** en la ecuación $3x + 7 = 1$:

$$3x + 7 = 1 \longrightarrow 3x = 1 - 7 \longrightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$$

La antiimagen de 1 es −2. En efecto:

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) + 7 = -6 + 7 = 1$$

1. Considera la función $\mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 3 \cdot x$ **definida con el criterio «multiplicar por 3».**

Calcula y contesta:

a) ¿Cuál es la imagen de 2? ¿Y la de 7? ¿Y la de −30?

b) ¿Cuál es el original o antiimagen de 60? Para averiguarlo calcula **x** en $3 \cdot x = 60$.

c) ¿Cuál es el original o antiimagen de 15?

d) Completa los pares (2,), (7,), (, 60), (5,), (, 15).

Actividades

1. Considera la función $\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$, definida con el criterio «multiplicar por 5»:

x	f(x)
2	...
$\frac{1}{2}$	...
$\frac{3}{5}$	...
...	3
...	40

a) Completa esta tabla de valores escribiendo en los puntos los números que faltan. Tienes que hallar tres imágenes y dos originales o antiimágenes.

b) Calcula $f(3) = ...$, $f(-8) = ...$, $f(\ ) = 50$, $f(\ ) = 90$

c) ¿Qué número racional tiene por imagen el cero?

d) ¿Tiene imagen por esta función cada número racional?

e) ¿Es la función **f** una aplicación?

2. Completa las tablas de valores de las siguientes funciones:

a) $y = x^2$

x	0	1	−1	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
y							9

b) $y = x^2 + 3x$

x	0	1	2	−2	3	−3	4	−4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y										

c) $y = /x/$ = valor absoluto de **x**

x	−1	1	−2	2	3	−3	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$
y	1	1						

d) $y = x^4$

x	1	−1	2	−2	3	−3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y										

3. Lee atentamente y contesta:

Si la letra **y** representa la longitud de una circunferencia de radio **x**, ¿cuál es la ecuación de la función que relaciona la variable independiente **x** con la variable dependiente **y**?

4. Escribe la ecuación de las funciones $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definidas por los criterios siguientes:

a) Sumar 8.

b) Sumar −3.

c) Multiplicar por 1.

d) Multiplicar por −1.

e) Elevar al cuadrado.

f) Sumar 6 y dividir por 2.

g) Multiplicar por 3 y dividir por 6.

5. Contesta y completa:

a) Si la función **f** asocia a cada número racional el doble de su opuesto entonces $f(x) = ...$

b) Si la función **f** asocia a cada número el triple de su cuadrado entonces $f(x) = ...$

c) Si la función **f** asocia a cada número racional el doble de su cubo entonces $f(x) = ...$

d) Si la función **f** asocia a cada número racional su mitad entonces $f(x) = ...$

e) Si la función **f** asocia a cada número racional sus tres octavos entonces $f(x) = ...$

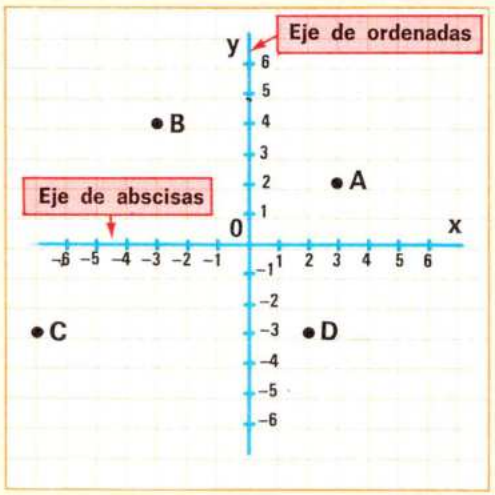
f) Si la función **f** asocia a cada número racional su inverso entonces $f(x) = ...$

En este último caso, ¿hay algún número racional que no tenga imagen? ¿Cuál es?

6. Escribe las ecuaciones de las funciones del ejercicio anterior utilizando la **y** en lugar de **f(x)**.

4. Ejes de coordenadas. Cuadrantes

El producto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

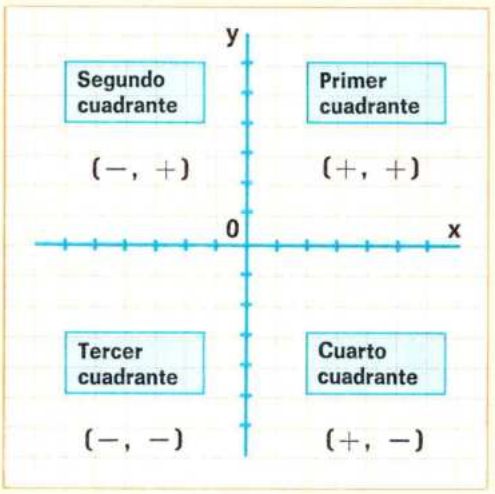


El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales está formado por los números enteros y por los números fraccionarios:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \ldots, -2, -1, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \ldots \right\}$$

Los pares ordenados de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ se representan en los ejes de coordenadas. En cada eje se representa el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Cuadrantes.



Recuerda que los dos ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes.

- Los puntos del primer cuadrante tienen la abscisa positiva y la ordenada positiva (+, +).
- Los puntos del segundo cuadrante tienen la abscisa negativa y la ordenada positiva (−, +).
- Los puntos del tercer cuadrante tienen la abscisa negativa y la ordenada negativa (−, −).
- Los puntos del cuarto cuadrante tienen la abscisa positiva y la ordenada negativa (+, −).

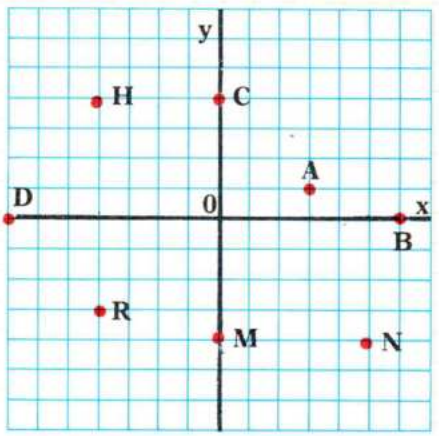
1. Observa los puntos señalados, escribe sus coordenadas y contesta:

a) **A**(,), **B**(6,0), **C**(0, 4),
H(,), **D**(,), **R**(,),
M(0, −4), **N**(,).

b) Los puntos que están sobre el eje de abscisas tienen una coordenada cero. ¿Cuál es?

c) Los puntos del eje de ordenadas tienen una coordenada cero. ¿Cuál es?

d) ¿Qué punto tiene de coordenadas (0, 0)?



5. La función lineal: de variable entera y de variable racional.

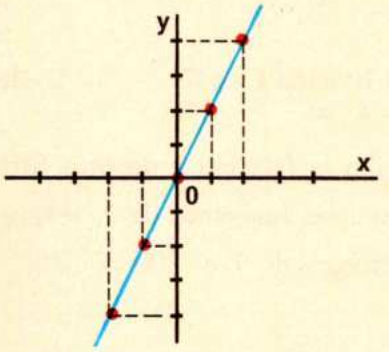
Representación gráfica de la función lineal de variable entera.

Función lineal f de variable entera

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$$
$$y = 2x$$

x	0	1	−1	2	−2	...
f(x) = 2x	0	2	−2	4	−4	...

Gráfico de la función lineal de variable entera: y = 2x



Recuerda del curso pasado que las funciones de variable entera que tienen una ecuación del tipo **y = ax** se llaman **funciones lineales.**

Observa que en los ejes de coordenadas se ha representado la función de variable entera **f**: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, de ecuación **f(x) = 2x**, o también **y = 2x**.

El gráfico o representación gráfica de esta función está formado por un conjunto de puntos (puntos rojos) que están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

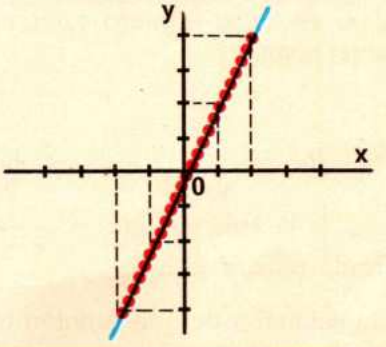
Representación gráfica de la función lineal de variable racional.

Función lineal g de variable racional

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$$
$$y = 2x$$

x	0	1	−1	2	−2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$
g(x) = 2x	0	2	−2	4	−4	1	3	−1

Gráfico de la función lineal de variable racional: y = 2x



Consideremos la función **g**: $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, de ecuación **g(x) = 2x**, o también **y = 2x**.

Si comparamos las funciones **f(x) = 2x** y **g(x) = 2x** vemos que el criterio para calcular las imágenes en ambas funciones es el mismo: «multiplicar por 2».

Sin embargo, las aplicaciones $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$ son diferentes, porque **f** es una función de variable entera y **g** una función de variable racional.

Así: $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Es decir, la imagen de $\frac{1}{2}$ mediante la función **g** es 1.

En cambio, la imagen de $\frac{1}{2}$ mediante la función **f** no existe, ya que la función **f** sólo actúa sobre los números enteros. Observa estas diferencias en la tabla de valores.

Observa que la gráfica de la función lineal de variable racional **g(x) = 2x** está formada también por puntos de una recta, pero aquí los puntos están tan próximos como queramos, ya que entre dos números racionales cualesquiera siempre hay otro número racional.

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. En la función $f(x) = x^2$, calcula:

① $f(2)$ ② $f(-2)$ ③ $f(3)$ ④ $f(-3)$ ⑤ $f(-1)$ ⑥ $f(1)$ ⑦ $f(0)$ ⑧ $f(4)$ ⑨ $f(-4)$ ⑩ $f(5)$ ⑪ $f(-5)$ ⑫ $f(10)$

2. En la función $f(x) = x + 3$, calcula:

① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $f(-1)$ ④ $f(2)$ ⑤ $f(-2)$ ⑥ $f(3)$ ⑦ $f(-3)$ ⑧ $f(4)$ ⑨ $f(-4)$ ⑩ $f(5)$ ⑪ $f(-5)$ ⑫ $f(6)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe la ecuación de la función en cada caso:

a) La función que asocia a cada número racional su cuarta potencia.

b) La función que asocia a cada número racional sus $\frac{4}{5}$

c) La función que asocia a cada número racional su cuarta parte más 6.

2. Dada la correspondencia de **A** en **B**:

$A = \{0, 1, 2, -1, -2\}$, $B = \{0, 5, 10, -5, 11\}$, que asocia a cada número **x** de **A** su quíntuple en **B**:

a) ¿Hay algún elemento que tenga más de una imagen?

b) ¿Es esta correspondencia una función?

c) Escribe la ecuación de la función.

d) Construye la tabla de valores de la función.

e) Escribe los pares ordenados de la función.

3. Dadas las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x - 2$, de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, calcula:

a) $\begin{cases} f(0) \\ g(0) \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(2) \\ g(2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(1) \\ g(1) \end{cases}$ d) $\begin{cases} f(-) \\ g(-1) \end{cases}$

e) ¿Cuál es el dominio de la función **f**?

f) ¿Cuál es el dominio de la función **g**?

4. Dada la función **f** de $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por $y = 6 \cdot x$:

a) Escribe la función **f** de otra forma.

b) Calcula las imágenes de 0, -1, -2 y 3.

c) La imagen de 7 es $f(7) = \ldots$

5. Indica, de los siguientes puntos, cuáles pertenecen a la gráfica de la función:

$f(x) = x - 5$ **C**(1, 4)

A(0, -5) **D**(2, -3)

B(1, 3) **H**(5, 0)

Como $f(0) = 0 - 5 = -5 \rightarrow$ el punto **A** pertenece a la gráfica de la función.

6. Considera la función de variable racional definida por $f(x) = \frac{1}{x - 3}$. Calcula y contesta:

a) $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$.

b) ¿Existe $f(3)$? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es el único número racional que no tiene imagen?

7. La función $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ no está definida para $x = 3$ y la función $g(x) = \frac{1}{x - 2}$ no está definida para $x = 2$.

Escribe la ecuación de una función que no esté definida para $x = 4$.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Pide a alguien que piense en un número, que lo multiplique por 2 y después le sume 20; que divida el resultado por 4 y que le reste la mitad del número pensado. El resultado será siempre 5.

Observa que si **n** es el número pensado:

$$\frac{2n + 20}{4} - \frac{n}{2} = \frac{2n + 20 - 2n}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

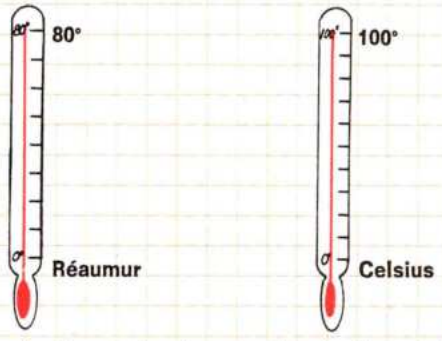
Si el juego se hiciera sumando 8 en lugar de 20 ¿cuál sería el resultado?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Una persona vende el metro de tela a 250 ptas. Si **x** designa el número de metros e **y** designa el valor de la tela, escribe la ecuación de la función que relaciona **x** e **y**.

2. Se sabe que las escalas de los termómetros Réaumur y Celsius se relacionan así:

0° Réaumur = 0° centígrados.
80° Réaumur = 100° centígrados.



Si **x** designa el número de grados en la escala Réaumur e **y** designa el número de grados centígrados, escribe la ecuación de la función que relaciona **x** con **y**.

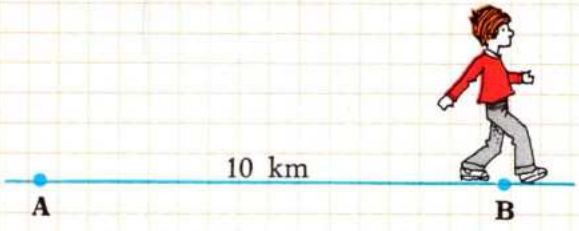
3. Un grifo echa en una piscina agua a razón de 12 litros por minuto. La piscina tiene 2.000 litros de agua. Si **t** designa el tiempo en minutos e **y** designa los litros de agua que en cada momento tiene la piscina, escribe la ecuación de la función que relaciona **t** e **y**.

4. Supongamos que cada marco vale 23 ptas.

Si **x** designa el número de marcos e **y** designa el número de pesetas ¿cuál es la ecuación que relaciona **x** con **y**?

5. Una persona se encuentra en el punto B, que está a 10 km del punto A. Comienza a andar alejándose de A a 6 km cada hora.

Si **t** designa el tiempo e **y** designa el espacio que existe desde la posición de la persona al punto A, escribe la ecuación de la función que relaciona **t** con **y**.



6. Se tienen 8 litros de un gas a la presión de 1 atmósfera. La temperatura se mantiene constante y se sabe que en estas condiciones se verifica:

presión × volumen = constante
P × **V** = constante

Completa la tabla:

P	1	2	4	8
V	8			

7. La velocidad de un móvil es de 60 km/h.

Expresa mediante una función la relación que hay entre el tiempo y el espacio.

8. Un móvil con movimiento uniforme recorre en 3 horas 225 km.

Expresa mediante una función la relación que existe entre el tiempo y el espacio.

1. Las funciones más simples

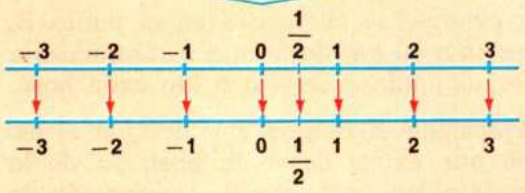
Las tres funciones más simples: identidad, constante y nula.

FUNCIÓN IDENTIDAD $y = x$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	$\frac{1}{2}$	...
y = x	0	1	−1	2	−2	$\frac{1}{2}$	...

Diagrama

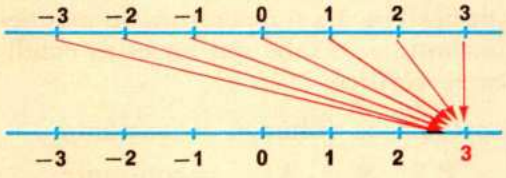


FUNCIÓN CONSTANTE $f(x) = 3$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	4	−4	...
f(x) = 3	3	3	3	3	3	3	3	...

Diagrama

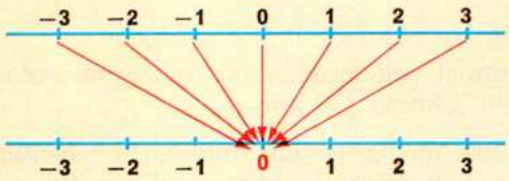


FUNCIÓN NULA $x \longrightarrow 0$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...
x → 0	0	0	0	0	0	0	0	...

Diagrama



• Función identidad

Recuerda que una función lineal de variable racional es una función de la forma $g(x) = ax$, o bien $y = ax$, donde todos los valores que toma **x** se encuentran en el conjunto ℚ de los números racionales.

Cuando el coeficiente **a** es igual a 1 ($a = 1$), la función $g(x) = x$, de ecuación $y = x$, se llama **función identidad.**

Observa la tabla de valores y un diagrama de esta función.

• Función constante

En el conjunto ℚ de los números racionales consideremos ahora la función definida por $f(x) = 3$:

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longrightarrow 3$$

Es decir, esta función asocia a cada número racional el número 3.

Observa la tabla de valores y un diagrama de esta función.

Éste es un ejemplo de un tipo especial de funciones llamadas **funciones constantes,** o simplemente **constantes.**

En general, toda función del tipo $x \longrightarrow a$, donde **a** es un número fijo, se llama **constante.**

Como cada número racional puede ser considerado como una función constante, resulta que en el conjunto ℚ hay tantas funciones constantes como números racionales.

• Función nula

Una función constante particular es la función que asocia a cada número racional el cero:

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longrightarrow 0$$

Esta función constante se llama **función nula.**

Observa la tabla de valores y un diagrama de esta función.

2. Suma de funciones

Suma de funciones de variable racional con el mismo dominio.

Considera las funciones de variable racional **f** y **g**, definidas respectivamente por las ecuaciones

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = 3x$$

Las dos funciones **f** y **g** tienen el mismo dominio, que es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Observa esta tabla de valores de las funciones **f** y **g**:

TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN f, DE LA FUNCIÓN g Y DE LA SUMA DE AMBAS (f + g)			
x	**Imagen por f** $f(x) = x^2$	**Imagen por g** $g(x) = 3x$	**Suma de las imágenes** $f(x) + g(x) = x^2 + 3x$
−3	$f(-3) = 9$	$g(-3) = -9$	$f(-3) + g(-3) = 9 + (-9) = 0$
−2	$f(-2) = 4$	$g(-2) = -6$	$f(-2) + g(-2) = 4 + (-6) = -2$
−1	$f(-1) = 1$	$g(-1) = -3$	$f(-1) + g(-1) = 1 + (-3) = -2$
0	$f(0) = 0$	$g(0) = 0$	$f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$
1	$f(1) = 1$	$g(1) = 3$	$f(1) + g(1) = 1 + 3 = 4$
2	$f(2) = 4$	$g(2) = 6$	$f(2) + g(2) = 4 + 6 = 10$
⋮			
x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 3x$	$f(x) + g(x) = x^2 + 3x$

En cada fila de la tabla anterior aparecen las imágenes de un número por la función **f** y por la función **g**. También aparece la suma de dichas imágenes.

En general, para un valor cualquiera **x** se verifica $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. En este caso se tiene:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Se observa que dadas dos funciones **f** y **g** con el mismo dominio se puede definir otra función **f + g** que hace corresponder a un número cualquiera la suma de sus imágenes mediante las funciones **f** y **g**.

Para sumar dos funciones de variable racional del mismo dominio se suman las imágenes para cada valor de x.

1. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 2x$; $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 2$; $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 3x^2$

a) Calcula $f(2)$, $f(-2)$, $g(1)$, $g(0)$, $h(-1)$ y $h(1)$.

b) Escribe $(f + g)(x)$, $(f + h)(x)$ y $(g + h)(x)$.

c) Calcula $(f + g)(1)$, $(f + g)(-1)$, $(f + h)(0)$, $(f + h)(-2)$, $(g + h)(2)$, $(g + h)(-1)$.

2. Observa la función de variable racional $f(x) = x^2$.

Escribe otra función g de variable racional y halla $(f + g)(x)$.

3. Funciones opuestas

Funciones opuestas de variable racional.

Observa la tabla de valores de las funciones **f** y **f'**, de variable racional definida por las ecuaciones $f(x) = 2x - 1$ y $f'(x) = -2x + 1$:

TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN f Y DE SU OPUESTA f'			
x	$f(x) = 2x - 1$	$f'(x) = -2x + 1$	$f(x) + f'(x)$
-3	$f(-3) = -7$	$f'(-3) = 7$	$f(-3) + f'(-3) = 0$
-2	$f(-2) = -5$	$f'(-2) = 5$	$f(-2) + f'(-2) = 0$
-1	$f(-1) = -3$	$f'(-1) = 3$	$f(-1) + f'(-1) = 0$
0	$f(0) = -1$	$f'(0) = 1$	$f(0) + f'(0) = 0$
1	$f(1) = 1$	$f'(1) = -1$	$f(1) + f'(-1) = 0$
2	$f(2) = 3$	$f'(2) = -3$	$f(2) + f'(-2) = 0$
⋮			
x	$f(x) = 2x - 1$	$f'(x) = -2x + 1$	$f(x) + f'(x) = 0$

FUNCIONES OPUESTAS

Función	Función opuesta
$g(x) = 3x - 7$	$-g(x) = -3x + 7$
$h(x) = -6x$	$-h(x) = 6x$
$m(x) = -2x - 5$	$-m(x) = 2x + 5$

Observa que la función suma $f + f'$, de **f** y **f'**, da siempre por imagen el cero.

En general, se tiene que la suma de las funciones **f** y **f'** es la función nula, ya que para cualquier número **x** se verifica:

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x) = (2x - 1) + (-2x + 1) = 0$$

La función **f'** se dice que es la función opuesta de la función **f**; también se dice que las funciones **f** y **f'** son funciones opuestas.

En general, la función opuesta de una función dada **f** se suele designar por $-f$.

Observa las funciones opuestas de **g**, **h** y **m**.

1. Dadas las funciones de variable racional cuyas ecuaciones son:

$f(x) = 2x$ $\quad g(x) = 3x^2$ $\quad h(x) = 5$ $\quad t(x) = 0$

a) Escribe las funciones $f + t$, $g + t$ y $h + t$.

b) Cuando a una función le sumamos la función nula, ¿qué función obtenemos?

2. Escribe las funciones opuestas de las funciones:

a) $f(x) = -2x^2 + 3$ $\quad$ c) $h(x) = -8x - 3$ $\quad$ e) $u(x) = 3x$

b) $g(x) = 4x^3 - 1$ $\quad$ d) $t(x) = -4x + 1$ $\quad$ f) $s(x) = -4$

3. Completa la siguiente tabla de valores, donde aparecen la función f y su opuesta:

x	$f(x) = 3x + 1$	$-f(x) = -3x - 1$
-1		
0		
1		

4. Diferencia de funciones

Diferencia de funciones de variable racional con el mismo dominio.

DIFERENCIA DE FUNCIONES

x	$f(x)=x^2$	$g(x)=3x$	$(f-g)(x)=x^2-3x$
−3	9	−9	18
−2	4	−6	10
−1	1	−3	4
0	0	0	0
1	1	3	−2
2	4	6	−2
3	9	9	0
⋮	⋮	⋮	⋮

Sean las funciones de variable racional **f** y **g**, cuyas ecuaciones son respectivamente $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$.

Llamamos función diferencia de **f** y **g** a la función suma de **f** con la opuesta de **g**.

En nuestro caso la función diferencia será:

$$(f - g)(x) = f + (-g)(x) = f(x) + [-g(x)] = x^2 + (-3x) = x^2 - 3x$$

Opuesta de g(x)

Observa en la tabla que la imagen de un valor de **x** mediante la función $(f - g)$ es igual a la diferencia de las imágenes de dicho valor de **x** mediante las funciones **f** y **g**.

Para restar dos funciones f y g de variable racional y del mismo dominio se suma a la imagen de f la opuesta de la imagen de g para cada valor de x.

1. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 4x^2$; $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 2x$; $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 5$

a) Calcula $f(-2)$, $f(2)$, $g(-3)$, $g(3)$, $h(-1)$ y $h(1)$.

b) Escribe $(f - g)(x)$, $(f - h)(x)$ y $(g - h)(x)$.

c) Calcula $(f - g)(-1)$, $(f - g)(1)$, $(f - h)(-2)$, $(f - h)(1)$, $(g - h)(0)$ y $(g - h)(-2)$.

2. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 3x$; $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 4$; $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 6x$

Determina $(f - g)(x)$ y $(f + h)(x)$.

3. Completa las tablas siguientes si $f(x) = 3x$ y $g(x) = 2x$.

f(x)	g(x)	f(x) + g(x)	f(x) − g(x)
3	2	3 + 2 = 5	3 − 2 = 1
6	4		
−3	−2		
0	0		
−6	−4		

5. Multiplicación de funciones

Multiplicación de funciones de variable racional con el mismo dominio.

MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES

x	f(x)=2	g(x)=x²	(f·g)(x)=2·x²
−2	2	4	8
−1	2	1	2
0	2	0	0
1	2	1	2
3	2	9	18
4	2	16	32
⋮	⋮	⋮	⋮

Sean las funciones de variable racional **f** y **g**, cuyas ecuaciones son respectivamente $f(x) = 2$ y $g(x) = x^2$.

Llamamos función producto de **f** y **g** a la función $f \cdot g$ de variable racional determinada por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

En este caso la función producto será:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 2 \cdot x^2$$

Observa en la tabla que la imagen de cada valor de **x** mediante el producto $(f \cdot g)$ es igual al producto de la imagen de ese valor de **x** mediante **f** por la imagen de ese valor de **x** mediante **g**.

Para multiplicar dos funciones de variable racional del mismo dominio se multiplican las imágenes para cada valor de x.

1. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 5$; $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow x^2$; $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 3$

a) Escribe $(f \cdot g)(x)$, $(f \cdot h)(x)$ y $(g \cdot h)(x)$.

b) Calcula $f(-1)$, $g(-2)$ y $h(-3)$.

c) $(f \cdot g)(-1)$, $(f \cdot g)(-2)$, $(f \cdot h)(-2)$, $(f \cdot h)(0)$, $(g \cdot h)(1)$ y $(g \cdot h)(-3)$.

2. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 5$; $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow x^3$; $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 2x$

Completa las tablas de valores siguientes:

x	f(x)	g(x)	(f · g)(x)
−2			
−1			
0			
1			
2			
3			

x	f(x)	h(x)	(f · h)(x)
1			
−1			
2			
−2			
3			
−3			

3. Dadas las funciones de variable racional $m(x) = 3x$ y $p(x) = 4x^2$

Calcula $(m + p)(x)$

Actividades

1. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 3x^2$ $\quad g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 2x$ $\quad h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 2$

a) Escribe $(f+g)(x)$, $(f+h)(x)$ y $(g+h)(x)$.

b) Completa las siguientes tablas:

x	f(x)	g(x)	(f + g)(x)
−3			
−2			
−1			
0			
1			
2			

x	f(x)	h(x)	(f + h)(x)
−4			
−2			
−1			
0			
2			
4			

2. Escribe las funciones opuestas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = -2x + 10$

b) $g(x) = -5x^2$

c) $h(x) = -10$

d) $t(x) = -12x$

e) $u(x) = -10x - 4$

f) $s(x) = 9x + 3$

g) Escribe las funciones $(f+g)(x)$, $(h+t)(x)$, $(g+u)(x)$ y $(g+s)(x)$.

3. Completa la tabla siguiente conociendo los valores de $f(x)$ y de $g(x)$:

f(x)	g(x)	−f(x)	−g(x)	(f+g)(x)	(f−g)(x)
4	5	−4	−5	4+5=9	4−5=−1
−4	−5				
8	10				
−8	−10				
0	0				
12	15				

4. Escribe la opuesta de la función $f(x) = 2x^2 + 1$ y completa después la tabla de valores siguiente:

x	f(x)	−f(x)	f(x)+[−f(x)]=f(x)−f(x)
−4			
−3			
−2			
0			
1			
3			
4			

Comprueba que la suma de una función con su opuesta es igual a la función nula.

5. Dadas las funciones de ecuaciones:

$f(x) = 2x^3$

$g(x) = 4x^2$

$h(x) = -6x$

$t(x) = 2x^2 + 3$

escribe:

a) $(f - g)(x)$ $\quad$ c) $(f + g)(x)$

b) $(h - t)(x)$ $\quad$ d) $(h + t)(x)$

6. Completa la tabla:

x	f(x)	g(x)	(f · g)(x)
0	4	1	
1	6	2	
2	8	3	
3	10	4	
4	12	5	

7. Dadas las funciones de variable real de ecuaciones

$f(x) = 3x + 2$ $\quad$ $g(x) = 5$

calcula:

a) $(f + g)(x)$

b) $(f - g)(x)$

c) $(f \cdot g)(x)$

6. Cociente de funciones

Cociente de funciones de variable racional con el mismo dominio.

COCIENTE DE FUNCIONES

x	f(x)=3x	g(x)=2	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3x}{2}$
2	6	2	3
4	12	2	6
−2	−6	2	−3
−4	−12	2	−6
6	18	2	9
−6	−18	2	−9
⋮	⋮	⋮	⋮

Sean las funciones de variable racional **f** y **g**, cuyas ecuaciones son: $f(x) = 3x$ y $g(x) = 2$.

Llamamos cociente de **f** y **g** a la función de variable racional $\frac{f}{g}$ determinada por el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ siempre que el denominador **g(x)** sea distinto de cero $[g(x) \neq 0]$.

En este caso la función cociente será:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x}{2}$$

Observa en la tabla que la imagen de un valor de **x** mediante $\frac{f}{g}$ es igual al cociente de las imágenes de dicho valor de **x** mediante **f** y **g**.

Para dividir dos funciones f y g de variable racional y del mismo dominio se divide la imagen de f entre la imagen de g, siempre que esta última sea distinta de cero.

1. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 2x$; $g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 5$; $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $x \longrightarrow 3x$

a) Calcula $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$, $g(1)$, $g(0)$, $h(0)$ y $h(4)$ y escribe $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

b) Calcula $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(-3)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(-4)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(6)$.

2. Completa la tabla de valores siguiente:

x	f(x) = 5x	g(x) = 10	(f · g)(x)	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
−1	−5	10	(−5) · 10 = −50	−5/10 = −1/2
0				
2				
−2				
4				

3. Dadas las funciones de ecuaciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x + 4$

a) Escribe la función cociente.

b) Calcula $\frac{f}{g}(-1)$, $\frac{f}{g}(-2)$, $\frac{f}{g}(0)$, $\frac{f}{g}(3)$, $\frac{f}{g}(4)$, $\frac{f}{g}(5)$.

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 3x^2$ $\quad g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 2x$ $\quad h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 1$

a) Escribe las funciones opuestas de **f**, **g** y **h**.

b) Escribe **(f+g)(x)**, **(f+h)(x)** y **(g+h)(x)**.

c) Escribe **(f−g)(x)**, **(f−h)(x)** y **(g−h)(x)**.

d) Completa la siguiente tabla de valores:

x	f(x)	g(x)	h(x)	(f+g)(x)	(f+h)(x)
−2					
−1					
0					
1					
2					
4					

2. Piensa y contesta:

a) Sabiendo que $f(a) = b$ y $g(a) = c$, ¿cuánto valdrá $(f + g)(a)$?

Sugerencia: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

b) ¿Cuánto valdrá $(f - g)(a)$?

c) Sabiendo que $(f+g)(a)=K$ y que $f(a)=b$, ¿cuánto valdrá $g(a)$?

Aplicar: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ y despejar $g(a)$.

3. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 5x$ $\quad g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to x$ $\quad h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to x^2$

a) Escribe las funciones $(f \cdot g)(x)$ y $(f \cdot h)(x)$.

b) Escribe las funciones opuestas de $(f \cdot g)(x)$ y de $(f \cdot h)(x)$.

c) Completa la siguiente tabla:

x	f(x)	g(x)	h(x)	(f·g)(x)	(f·h)(x)
−5					
−3					
−1					
0					
1					
2					

4. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 5$ $\quad g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 2$ $\quad h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 3$

a) Escribe ecuaciones de las funciones $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$ y $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$.

b) Completa la siguiente tabla:

x	f(x)	g(x)	h(x)	(f/g)(x)	(f/h)(x)
−4					
−2					
0					
1					
3					
5					

5. Dadas las funciones de variable racional:

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to x^2 + 2$

$g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to x^2 - 3$

$h(x) = 2$

a) Escribe las ecuaciones de las funciones:

$(f + g)(x)$ $\quad (f - g)(x)$ $\quad (f + h)(x)$

$(f \cdot g)(x)$ $\quad (f \cdot h)(x)$ $\quad \left(\frac{f}{h}\right)(x)$

b) Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

x	f(x)	g(x)	(f+g)(x)	(f·g)(x)	$\left(\frac{f}{h}\right)(x)$
−3					
−2					
−1					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					

TEMA 14 FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO. GRÁFICOS

1. Gráficos de la función constante y de la función lineal

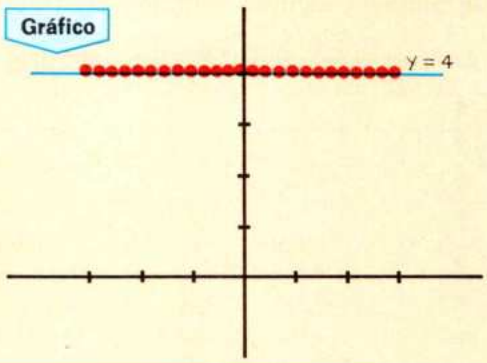
Gráfico de la función constante $y = k$.

FUNCIÓN CONSTANTE $f(x) = 4$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	...
$f(x) = 4$	4	4	4	4	4	4	...

Gráfico



Recuerda que una función de variable racional cuya ecuación es de la forma $f(x) = k$, o bien $y = k$, se llama **función constante.**

Observa la tabla de valores y el gráfico de la función constante $f(x) = 4$, o bien $y = 4$.

El gráfico o representación gráfica de esta función está formado por un conjunto de puntos (puntos rojos) que están sobre una recta paralela al eje de abscisas (eje de las **x**) que pasa por el punto (0, 4).

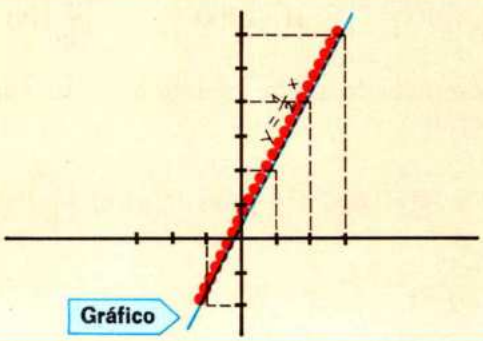
El gráfico de la función constante de ecuación $y = k$ está formado por un conjunto de puntos situados en una recta que es paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto (0, k).

Gráfico de la función lineal $y = ax$.

FUNCIÓN LINEAL $g(x) = \frac{1}{2}x$

Tabla de valores

x	0	2	4	−2	−4	−6	6	1
$g(x) = \frac{1}{2}x$	0	1	2	−1	−2	−3	3	$\frac{1}{2}$



Gráfico

Recuerda que una función de variable racional cuya ecuación es de la forma $g(x) = ax$, o bien $y = ax$, se llama **función lineal.**

Observa la tabla de valores y el gráfico de la función lineal $g(x) = \frac{1}{2}x$, o bien $y = \frac{1}{2}x$.

El gráfico de esta función está formado por un conjunto de puntos (puntos rojos) que están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

El gráfico de una función lineal de ecuación $y = ax$ está formado por un conjunto de puntos que están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

1. Representa en un mismo gráfico las funciones cuyas ecuaciones son:

a) $y = -3$ b) $y = -2$ c) $y = 3$ d) $y = 2$

2. Construye las tablas de valores para las funciones siguientes y represéntalas gráficamente:

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$

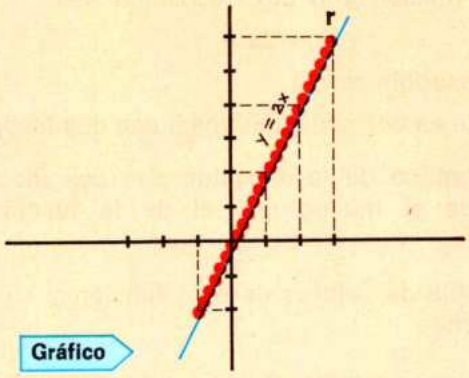
2. Gráfico de la función afin

Gráfico de la función afín $y = 2x + 3$.

FUNCIÓN LINEAL DE ECUACIÓN $y = 2x$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
y = 2x	0	2	−2	4	−4	6	−6	...

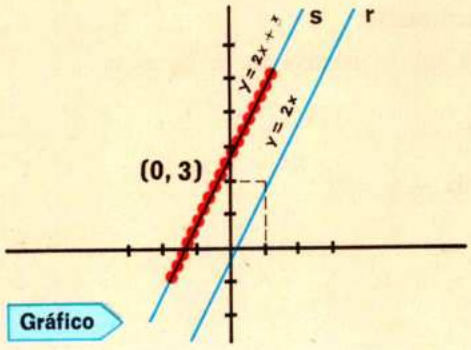


Gráfico

FUNCIÓN AFÍN DE ECUACIÓN $y = 2x + 3$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	...
y = 2x + 3	3	5	1	7	−1	9	...



Gráfico

Consideremos primero la función lineal $y = 2x$.

Observa la tabla de valores y el gráfico de dicha función.

El gráfico de esta función está formado por un conjunto de puntos que está sobre la recta **r**. También diremos que la función de ecuación $y = 2x$ determina la recta **r**.

Consideremos ahora la función de ecuación $y = 2x + 3$.

Una función de variable racional que tiene una ecuación de la forma $y = ax + b$, donde **a** y **b** son números racionales, se llama **función afín.**

Observa en la tabla de valores de la función afín de ecuación $y = 2x + 3$ que los pares ordenados de la función afín $y = 2x + 3$ se obtienen a partir de los pares ordenados de la función lineal $y = 2x$ sumando tres unidades a la segunda componente de cada par:

$y = 2x$ → (0, 0), (1, 2), (−1, −2), (2, 4), (−2, −4), ...

$y = 2x + 3$ → (0, 3), (1, 5), (−1, 1), (2, 7), (−2, −1), ...

Por esta razón el gráfico de la función afín $y = 2x + 3$ (puntos rojos de la recta **s**) se obtiene trasladando tres unidades hacia arriba el gráfico de la función lineal $y = 2x$ (puntos de la recta **r**). Así, el punto (0, 0) se traslada al punto (0, 3), que está en el gráfico de la función afín.

Los puntos del gráfico de una función afín de ecuación $y = ax + b$ se encuentran en una recta que pasa por el punto (0, b) y que es paralela a la recta que contiene los puntos de la función $y = ax$.

1. Construye tablas de valores y representa en un mismo gráfico las funciones:

$y = 3x$ $\qquad$ $y = 3x + 2$

a) ¿Tienen algún punto en común?

b) ¿En qué se parecen los gráficos de estas funciones?

2. Representa en un mismo gráfico las funciones cuyas ecuaciones son:

$y = 2x$ $\qquad$ $y = 2x + 3$ $\qquad$ $y = 2x + 5$

¿Cómo son las rectas que resultan?

3. Gráfico de una ecuación lineal con dos incógnitas.

ECUACIÓN LINEAL $2x + y = 1$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
y = −2x+1	1	−1	3	−3	5	−5	7	...

Gráfico

Gráfico de la ecuación lineal con dos incógnitas $2x + y = 1$.

Una ecuación de la forma **ax + by = c**, donde **a**, **b** y **c** son números racionales, se llama **ecuación lineal con dos incógnitas: x e y.**

La ecuación de una función afín cuyo gráfico determina una recta es una función lineal con dos incógnitas.

Así, dada la función afín cuya ecuación es:

$$y = -2x + 1$$

la podemos escribir así:

$2x + y = 1$, que es una ecuación lineal con dos incógnitas.

Por eso, el gráfico de la ecuación con dos incógnitas $2x + y = 1$ es el mismo que el de la función afín $y = -2x + 1$.

Observa la tabla de valores de esta función y su representación gráfica.

El gráfico de la ecuación $2x + y = 1$ es un conjunto de puntos situados sobre la recta r que pasa por el punto (0, 1).

1. Dadas las funciones cuyas ecuaciones son:

$y = \frac{2}{3}x - 2$ $\qquad$ $y = 2x - 1$ $\qquad$ $y = \frac{4x}{5} + 3$

a) Haz la tabla de valores y represéntalas gráficamente.

b) Escribe cada una de las ecuaciones anteriores en la forma **ax ± by = c.**

2. Dibuja el gráfico de las ecuaciones siguientes:

a) $3x + y = 2$ $\qquad$ b) $2x - y = 1$ $\qquad$ c) $3x + y = 5$

Despeja en cada una de ellas la incógnita **y**.

3. Dada la ecuación con dos incógnitas:

$x + 3y = 1$

Di cuáles de los siguientes pares verifican dicha ecuación:

$(1, 0)$, $(1, 2)$, $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$, $(-2, 1)$, $(1, 4)$, $(0, 1)$, $(-5, 2)$

4. Completa la tabla de valores de las funciones de variable racional de ecuación:

a) $y = 2x + 3$

x	1		0	2	
y		1			−1

b) $y = 3x - 1$

x	0		−1		−2
y		2		5	

Escribe cada una de ellas de la forma **ax ± by = c.**

Actividades

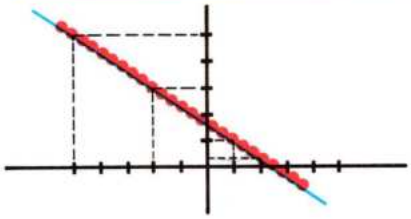
1. Representación gráfica de la ecuación lineal $2x + 3y = 5$.

EJEMPLO RESUELTO

$$2x + 3y = 5$$

$$y = \frac{5 - 2x}{3}$$

x	1	2	−2	−5
y	1	1/3	3	5



Vamos a representar ahora el gráfico que corresponde a la ecuación con dos incógnitas $2x + 3y = 5$.

Para ello, despejamos la incógnita **y**, para escribirla en forma de función afín:

$$3y = -2x + 5 \longrightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Observa la tabla de valores y la representación gráfica de la ecuación $2x + 3y = 5$.

Este gráfico está formado por un conjunto de puntos (puntos rojos) que están sobre una recta; se dice que la ecuación $2x + 3y = 5$ determina la recta.

Dibuja el gráfico de estas ecuaciones:

a) $x + 2y = 4$ c) $x - 3y = 5$

b) $2x + 2y = 3$ d) $x - y = 6$

2. Representa gráficamente la ecuación:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 4$$

Sugerencia Quita los denominadores para ponerla de la forma $ax + by = c$.

3. a) Representa gráficamente la ecuación $x - y = 3$.

b) Escribe otra ecuación cuyo gráfico sea una recta paralela a la anterior.

4. Representa en los mismos ejes de coordenadas las rectas **r** y **s**, determinadas por las ecuaciones:

r $\longrightarrow 2x - y = 6 \longrightarrow y = 2x - 6$

s $\longrightarrow 2x - y = 3 \longrightarrow y = 2x - 3$

¿Cómo son las rectas **r** y **s**?

5. Comprueba que las rectas determinadas por las ecuaciones

a) $y = 3x$

b) $y = 3x + 2$

c) $y = 3x + 5$

son paralelas.

¿Qué tienen en común estas ecuaciones?

6. Escribe dos funciones afines que determinen dos rectas paralelas.

7. Representa en un mismo gráfico las ecuaciones:

a) $2x - 3y = 1$

b) $2x - 3y = 4$

¿Cómo son los gráficos de estas ecuaciones?

8. Representa en un mismo gráfico las ecuaciones:

a) $3x - 2y = 0$

b) $2x - y = 0$

¿Tienen sus gráficos algún punto en común?

9. Dadas las siguientes ecuaciones, despeja en cada una de ellas la incógnita **y** y completa después las tablas de valores:

a) $x + 2y = 4$

x	0	2	−2	4	−4
y					

b) $x + 3y = 6$

x	0	3	−3	6	−6
y					

Represéntalas gráficamente.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa gráficamente las funciones cuyas ecuaciones son:

a) $y = -1$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x + 3$

¿A cuál de ellas es paralelo el gráfico de la ecuación $y = -2x + 1$?

2. Piensa y contesta:

a) El gráfico de una función determina una recta **r**, paralela a la recta **s**, que determina la función $y = 3x + 2$ si la recta **r** pasa por el punto $(0, 0)$.

¿Cuál será la ecuación de dicha recta?

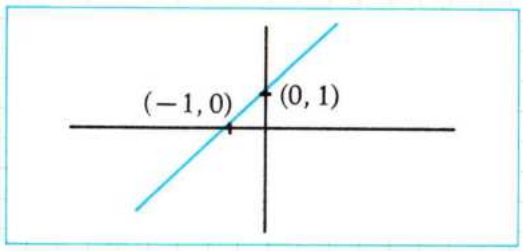
b) La ecuación de una función es de la forma $y = ax + b$.

¿Qué valor tendrán que tener **a** y **b** para que su gráfico sea una recta paralela a la de ecuación $y = -4x$ y que pase por el punto $(0, -2)$?

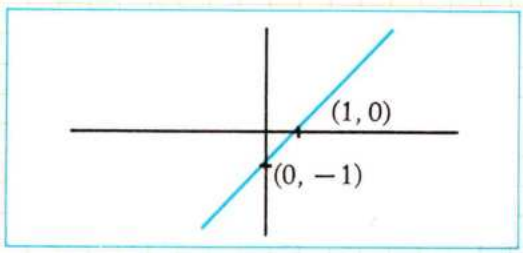
3. Las rectas siguientes son los gráficos de las funciones de ecuación $y = ax + b$.

Indica cuáles son los valores de **b** en cada gráfico:

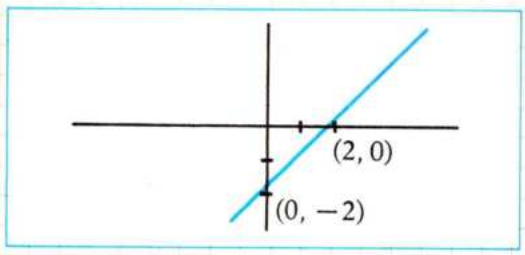
a)



b)



c)



4. Representa la función de ecuación $y = -x$. Sin necesidad de hacer la tabla de valores, dibuja:

a) Una recta paralela a la que determina la función $y = -x$ que pase por el punto $(0, 1)$.

b) Una recta paralela a la que determina la función $y = -x$ que pase por el punto $(0, -1)$.

c) Escribe las ecuaciones de las funciones que determinan las rectas de los apartados a) y b).

5. Construye las tablas de valores y representa en un mismo gráfico las funciones de ecuaciones:

a) $y = 3x$

x	0	1	2	−1	−2
y					

b) $y = -x + 4$

x	0	1	2	−1	−2
y					

¿Qué punto tienen en común sus gráficos?

6. Representa gráficamente estas ecuaciones:

a) $2x + y = 3 \rightarrow r$ b) $x + 2y = 6 \rightarrow s$

Escribe después la ecuación de una función que determina una recta que sea paralela a cada una de ellas.

7. Dada la función cuya ecuación es $y = \frac{4}{3}x - 1$, represéntala gráficamente.

Toma como valores de **x**: 3, −3 y 0.

Escribe la ecuación $y = \frac{4}{3}x - 1$ en la forma $ax \pm by = c$.

8. Llamemos **r** a la recta determinada por la función $y = 2x + 3$.

Escribe:

a) Tres puntos que pertenezcan a la recta **r**.

b) Tres puntos que no pertenezcan a la recta **r**.

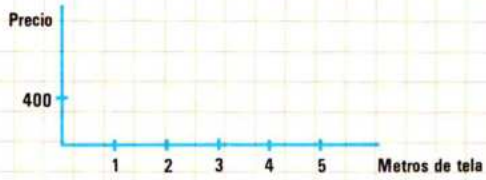
PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Una señora compra un metro de tela por 400 ptas.

a) ¿Cuánto le costarán 2 metros de tela? ¿Y 4 metros?

b) Escribe la ecuación de la función que describe el precio según los metros.

c) Haz el gráfico de esta función:



2. El precio de un artículo A durante un año ha sido:

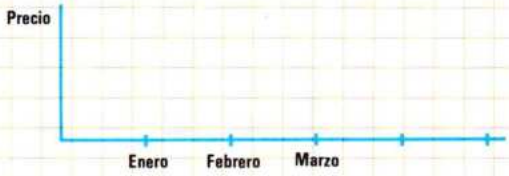
a) Desde enero a marzo ha permanecido constante a un precio de 1.000 ptas.

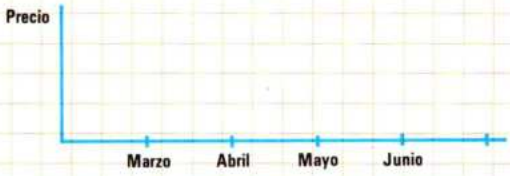
b) Desde marzo a junio el precio ha sido de 1.500 ptas.

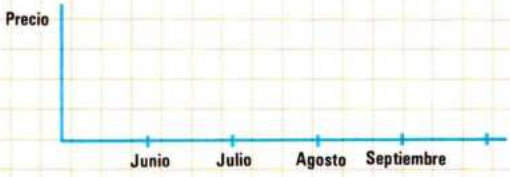
c) Desde junio a septiembre, de 2.000 ptas.

d) Desde septiembre a diciembre ha costado 2.500 ptas.

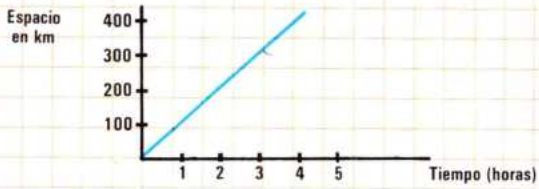
Escribe la ecuación de la función en cada período donde el precio ha permanecido constante. Haz el gráfico de cada una.







3. El siguiente gráfico representa el espacio recorrido por un coche en un cierto tiempo. Observa el gráfico y responde:



a) ¿Qué distancia ha recorrido el coche en una hora? ¿Y en 2 horas? ¿Y en 3 horas?

b) Escribe la ecuación de la función que describe el espacio recorrido según el tiempo.

c) ¿Cuánto tiempo tardará dicho coche en recorrer 600 km? ¿Y en recorrer 1.000 kilómetros?

4. Las ecuaciones que describen el espacio en kilómetros recorrido por dos coches A y B en función del tiempo son: A: $y = 200x$; B: $y = 150x$.

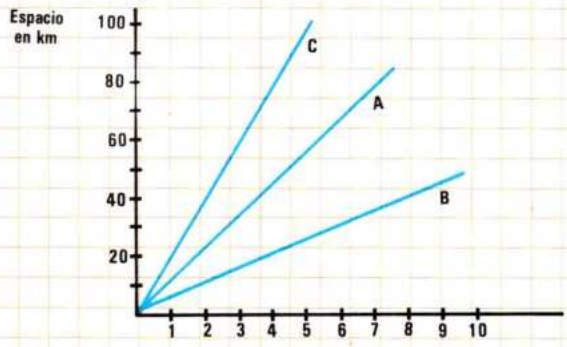
a) ¿Cuántos kilómetros recorre cada coche en una hora? ¿Y en 4 horas?

b) ¿Cuál de los dos va a mayor velocidad?

c) ¿Cuánto tiempo tardará cada coche en recorrer 600 km?

d) Representa en un mismo gráfico cada una de las ecuaciones.

5. Tres ciclistas A, B y C, salen al mismo tiempo hacia la meta, situada a 100 km. La representación gráfica de su movimiento es:



a) ¿Cuál llegará antes a la meta?

b) ¿Cuál lleva mayor velocidad?

c) Dibuja un gráfico tal que el primero en llegar a la meta sea A, después B y después C.

TEMA 15 SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Sistemas de ecuaciones lineales. I

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Sistema dado

[A]: $x + 2y = 5$

[B]: $x + y = 3$

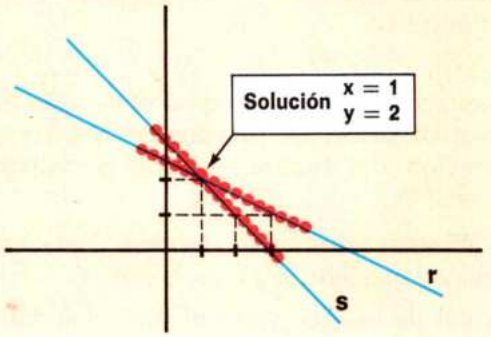
Tabla con dos puntos

$x + 2y = 5 \longrightarrow y = \dfrac{5 - x}{2} \longrightarrow$

x	1	3
y	2	1

$x + y = 3 \longrightarrow y = 3 - x \longrightarrow$

x	1	2
y	2	1



Solución de un sistema de ecuaciones.

Sean las dos ecuaciones siguientes:

[A]: $x + 2y = 5$

[B]: $x + y = 3$

El sistema formado por las ecuaciones [A] y [B] se llama **sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas: **x** e **y**.

Vamos a hacer el gráfico de cada una de estas ecuaciones y a comprobar si existe un punto común para ambos gráficos.

Observa que el gráfico de la ecuación [A] determina la recta **r**, y que el gráfico de la ecuación [B] determina la recta **s**. El punto común a ambas rectas es el punto de coordenadas (1, 2). Hemos resuelto el sistema por el método gráfico.

El punto de coordenadas (1, 2), es decir, $x = 1$ e $y = 2$, verifica simultáneamente las dos ecuaciones anteriores:

$r \longrightarrow x + 2y = 5 \longrightarrow 1 + 2 \cdot 2 = 5$

$s \longrightarrow x + y = 3 \longrightarrow 1 + 2 = 3$

Entonces decimos que $x = 1$ e $y = 2$, es decir, el par (1, 2), es una solución del sistema.

Resolver un sistema es hallar su solución o soluciones.

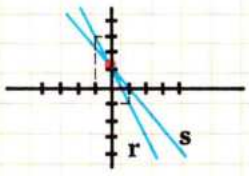
1. Dados los siguientes sistemas:

a) $x + y = 2$, $2x + 3y = 5$ b) $x + y = 1$, $3x + 2y = 3$ c) $2x + y = 5$, $x + 3y = 5$

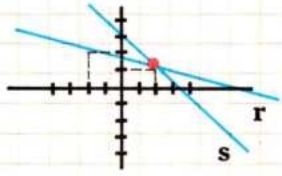
- Representa gráficamente cada uno de ellos.
- ¿Cuál será su solución? Halla la solución de cada uno.

2. Observa los siguientes gráficos:

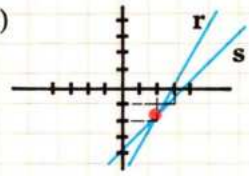
a)



b)



c)



Escribe las coordenadas del punto por el que pasan las dos rectas simultáneamente.

3. Comprueba si los puntos indicados en cada caso son solución del sistema:

a) $x = 1$, $y = 3$

$2x + 1 = 5 \;\}\; 2 \cdot 1 + 3 = 5$

$x + y = 4 \;\}\; 1 + 3 = 4$

$x = 1$, $y = 3$ es solución del sistema.

b) $x = 3$, $y = -1$

$2x + y = 5$

$x + 2y = 4$

Clases de sistemas de ecuaciones.

SISTEMA CON SOLUCIÓN ÚNICA

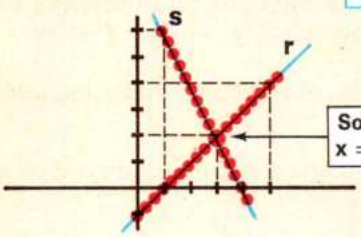
$x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$

$2x + y = 8 \rightarrow y = 8 - 2x$

Tabla con dos puntos

x	0	5
y	−1	4

x	1	3
y	6	2



Solución única
x = 3 y = 2

SISTEMA SIN NINGUNA SOLUCIÓN

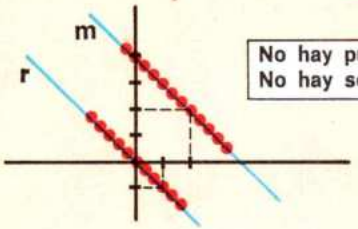
$x + y = 4 \rightarrow y = 4 - x$

$2x + 2y = 0 \rightarrow y = \frac{-2x}{2} = -x$

Tabla con dos puntos

x	0	2
y	4	2

x	0	1
y	0	−1



No hay punto común.
No hay solución.

SISTEMA CON INFINITAS SOLUCIONES

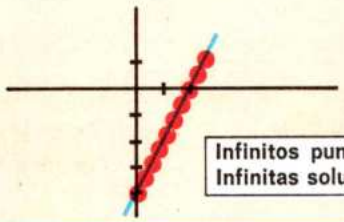
$2x - y = 4 \rightarrow y = 2x - 4$

$4x - 2y = 8 \rightarrow y = \frac{4x - 8}{2}$

Tabla con dos puntos

x	0	2
y	−4	0

x	0	2
y	−4	0



Infinitos puntos comunes.
Infinitas soluciones.

PRIMER CASO

Que el sistema tenga una sola solución.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x - y = 1 \longrightarrow r$$
$$2x + y = 8 \longrightarrow s$$

Observa que los gráficos de estas dos ecuaciones determinan dos rectas **r** y **s** que se cortan en el punto de coordenadas (3, 2).

En este caso, el sistema tiene una única solución, que es **x** = 3 e **y** = 2, es decir, el par (3, 2).

SEGUNDO CASO

Que el sistema no tenga ninguna solución.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y = 4 \longrightarrow m$$
$$2x + 2y = 0 \longrightarrow r$$

Observa que los gráficos de estas dos ecuaciones determinan dos rectas paralelas **m** y **r** y por tanto no tienen ningún punto en común.

En este caso, el sistema no tiene ninguna solución.

TERCER CASO

Que el sistema tenga infinitas soluciones.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x - y = 4$$
$$4x - 2y = 8$$

Observa que los gráficos de estas ecuaciones determinan dos rectas **p** y **q** que coinciden, y por tanto cualquier punto de la recta es una solución del sistema.

En este caso, el sistema tiene infinitas soluciones.

Las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden ser:

a) Una única solución, si las rectas que representan a las ecuaciones se cortan.

b) Ninguna solución, si dichas rectas son paralelas.

c) Infinitas soluciones, si las rectas coinciden.

3. Métodos para la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones. I

Método de sustitución.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Sistema dado

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

① $y = 7 - 2x$

② $x + 3 \cdot (7 - 2x) = 11$

③ **Resolvemos la ecuación:**

$x + 21 - 6x = 11$

$21 - 11 = 6x - x$

$10 = 5x$

$x = \frac{10}{5} = 2$

④ $2x + y = 7 \longrightarrow 2 \cdot 2 + y = 7$

$y = 7 - 4 = 3$

Solución $x = 2; \quad y = 3$

Sea el sistema de ecuaciones siguiente:

$$2x + y = 7 \qquad x + 3y = 11$$

Para resolver este sistema por el método de sustitución procedemos así:

① Despejamos una incógnita en una cualquiera de las dos ecuaciones. Por ejemplo, en la primera ecuación despejamos la incógnita **y** $\longrightarrow$ $y = 7 - 2x$.

② Sustituimos en la otra ecuación la incógnita despejada.

En este caso la incógnita **y** se sustituye por su valor $(7 - 2x)$ obtenido en ①

③ Resolvemos la ecuación resultante, que es una ecuación lineal con una sola incógnita, en este caso **x**. Así obtenemos el valor de **x**, que es $x = 2$.

④ Por último, sustituimos el valor de la incógnita **x** en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera, y así calculamos el valor de la otra incógnita **y**, que es $y = 3$.

1. Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

2. Resuelve gráficamente este sistema: $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$

Resuélvelo después por el método de sustitución y comprueba que obtienes los mismos resultados que por el método gráfico.

3. Dados estos sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Resuélvelos por el método de sustitución y comprueba que la solución hallada en cada caso verifica las ecuaciones del sistema.

4. Sean los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 6x + 15y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

Representa gráficamente cada uno de ellos.

4. Métodos para la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones. II

Método de igualación.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

Sistema dado $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

① $\begin{cases} y = 7 - 2x \\ y = \dfrac{11 - x}{3} \end{cases}$

② $7 - 2x = \dfrac{11 - x}{3}$

③ **Resolvemos esta ecuación:**

$3 \cdot (7 - 2x) = 11 - x$
$21 - 6x = 11 - x$
$21 - 11 = 6x - x$
$10 = 5x$
$x = \dfrac{10}{5} = 2$

④ $2x + y = 7 \longrightarrow 2 \cdot 2 + y = 7$
$y = 7 - 4 = 3$

Solución $x = 2;\quad y = 3$

Vamos a resolver por el método de igualación el mismo sistema anterior:

$$2x + y = 7 \qquad x + 3y = 11$$

Para ello procedemos del modo siguiente:

① Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones. Por ejemplo, despejamos la incógnita **y**.

② Formamos una igualdad con la expresión de la incógnita **y** obtenida en una ecuación y con la expresión de la incógnita **y** obtenida en la otra ecuación.

③ Resolvemos la ecuación resultante, que es una ecuación lineal con una sola incógnita (**x**). Así obtenemos el valor de **x** que es $x = 2$.

④ Por último, sustituimos el valor de la incógnita **x** en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera, y calculamos el valor de la otra incógnita **y** que es $y = 3$.

Como ves, con el método de igualación obtenemos los mismos resultados que con el método de sustitución.

1. Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$

2. Resuelve gráficamente el sistema: $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Resuélvelo después por el método de igualación y comprueba que obtienes los mismos resultados que por el método gráfico.

3. Dados los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ x - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 11 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

Resuélvelos por el método de igualación y comprueba que la solución hallada en cada caso verifica las ecuaciones del sistema.

4. Sean los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 39 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = -12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

Resuélvelos por el método de igualación despejando la incógnita **x** de cada ecuación de los sistemas.

5. Métodos para la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones. III

Método de reducción

El método de reducción consiste en conseguir que al sumar las dos ecuaciones del sistema resulte una ecuación con una sola incógnita.

Para ello, será necesario multiplicar los dos miembros de una ecuación y en algunos casos los de las dos ecuaciones por números convenientes para que en las dos ecuaciones los coeficientes de una de las incógnitas sean números opuestos.

Vamos a resolver por el método de reducción el mismo sistema que hemos resuelto antes por los métodos de sustitución e igualación:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

Para ello se procede del modo siguiente:

① Se multiplican los dos miembros de la segunda ecuación por -2 y así resultan dos ecuaciones que tienen opuestos los coeficientes de x.

② Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones y así resulta una ecuación con una sola incógnita: $-5y = -15$.

③ Se resuelve esta ecuación y su valor $y = 3$ se sustituye en una ecuación del sistema para obtener el valor de x.

Así resulta la solución $x = 2$, $y = 3$.

Ejemplo

Consideremos el sistema [A]:

Multiplicando la primera ecuación por (-7) y la segunda por (3) resulta el sistema [B]. Como los coeficientes de x en este sistema [B] son números opuestos, al sumar resulta una ecuación con una sola incógnita:

$$-40y = 120 \longrightarrow y = \frac{120}{-40} = -3$$

Sustituyendo este valor de y en la segunda ecuación del sistema resulta $7x + 3 \cdot (-3) = 5$.

$$7x - 9 = 5 \longrightarrow 7x = 5 + 9 = 14 \longrightarrow x = \frac{14}{7} = 2$$

El par $(2, -3)$ es la solución del sistema propuesto.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

Sistema dado

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

①
$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ -2x - 6y &= -22 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ -2x - 6y &= -22 \\ \hline -5y &= -15 \end{aligned}$$

③
$$\begin{cases} y = \dfrac{-15}{-5} = 3 \\ 2x + 3 = 7 \longrightarrow 2x = 7 - 3 = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Solución: $x = 2$; $y = 3$

Sistema dado

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= -15 \\ 7x + 3y &= 5 \end{aligned} \quad [A]$$

$$\begin{aligned} -21x - 49y &= 105 \\ 21x + 9y &= 15 \\ \hline -40y &= 120 \end{aligned} \quad [B]$$

$$y = \frac{120}{-40} = -3$$

$$7x = 14 \longrightarrow x = \frac{14}{7} = 2$$

Solución: $x = 2$; $y = -3$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{y + 3}{2} = 1$
$2x + y = 1$

b) $x + y = 6$
$3x - 2y = 8$

c) $x + 2y = 9$
$3x - y = 20$

d) $x - y = 9$
$x - 3y = 1$

e) $5x - 2y = 3$
$4x - y = 2$

f) $x + y = 5$
$x - y = 1$

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

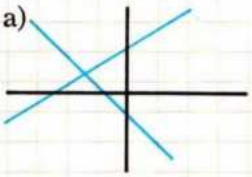
1. Piensa y contesta:

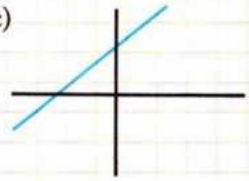
a) Un sistema de ecuaciones tiene una solución. ¿Pueden ser los gráficos de sus ecuaciones rectas coincidentes? Razona tu respuesta.

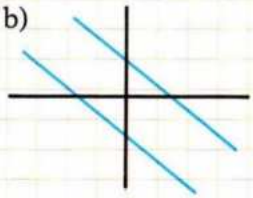
b) Los gráficos de las dos ecuaciones de un sistema son dos rectas paralelas. ¿Tendrá solución dicho sistema? ¿Por qué?

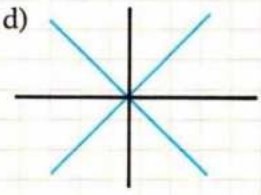
c) Un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. ¿Cómo serán los gráficos de dichas ecuaciones?

2. Las representaciones gráficas de varios sistemas son las siguientes:

a) 

c) 

b) 

d) 

Obsérvalas y responde, en cada caso, si el sistema tiene:

— Una única solución.
— Infinitas soluciones.
— Ninguna solución.

Razona tu respuesta.

3. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $2x + 3y = -3$
$x + y = 1$

b) $x - y = 4$
$3x - 2y = -3$

c) $6x - y = 3$
$x - y = 14$

d) $2x - y = 7$
$3x - 2y = 9$

4. Resuelve por el método de sustitución los sistemas:

a) $x + y = 5$
$2x - y = 7$

b) $3x - 2y = 7$
$2x + y = 14$

5. Resuelve por el método de igualación los sistemas:

a) $x + y = 11$
$x - y = 3$

b) $3x - 4y = 9$
$4x - 6y = 14$

6. Resuelve por el método de reducción los sistemas:

a) $x - 2y = -6$
$2x - y = 3$

b) $3x - 2y = -13$
$x + 4y = 5$

7. Resuelve por los tres métodos (sustitución, igualación y reducción) el sistema:

$$\frac{8x}{3} + \frac{2y}{5} = 14$$
$$\frac{2x}{3} + \frac{5y}{4} = \frac{9}{4}$$

Sugerencia

En primer lugar, quita los denominadores de las ecuaciones.

8. Comprueba si es correcta la solución de los siguientes sistemas:

a) $4x + 3y = 7$
$2x - 5y = -4$

Solución $x = 1;\ y = 1.$

b) $2x - 3y = -2$
$x + y = 4$

Solución $x = 2;\ y = 2$

c) $5x - 2y = -2$
$x - 2y = -2$

Solución $x = 0;\ y = -1.$

d) $2x - y = 2$
$3x - 5y = 3$

Solución $x = 1;\ y = 0.$

9. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución sea $x = 1;\ y = 2.$

10. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y resuélvelo por los tres métodos.

TEMA 16 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS

1. Problemas sobre números

PROBLEMA 1

La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras.

¿Cuál es ese número?

① PLANTEAMIENTO

En el número que buscamos llamamos:

$x \longrightarrow$ la cifra de las unidades

$y \longrightarrow$ la cifra de las decenas

Recuerda que todo número de dos cifras se puede descomponer en suma.

Así, $34 = 10 \cdot 3 + 4$. Del mismo modo, para el número 43 se tiene:

$$43 = 10 \cdot 4 + 3$$

El número de dos cifras **yx** se escribe $10y + x$.

El número de dos cifras **xy** se escribe $10x + y$.

Según el enunciado, se tienen estas dos ecuaciones:

$$y = 2x$$
$$(10y + x) - 27 = 10x + y$$

② RESOLUCIÓN

$$y = 2x$$
$$(10y + x) - 27 = 10x + y$$

Sustituyendo **y** por su valor **(2x)** en la segunda ecuación se tiene:

$$(10 \cdot 2x + x) - 27 = 10x + 2x$$

$$20x + x - 27 = 12x$$

$$21x - 12x = 27$$

$$9x = 27$$

$$x = \frac{27}{9} = 3$$

$$y = 2 \cdot 3 = 6$$

③ COMPROBACIÓN

Estos valores, $x = 3$, $y = 6$, son válidos por ser números naturales que verifican las condiciones del enunciado.

Primera condición

$y = 2 \cdot x \longrightarrow 6 = 2 \cdot 3$

Segunda condición

$63 - 27 = 36$, que es el número que resulta de invertir el orden de las cifras en el número 63.

El número pedido es 63.

1. Resuelve los problemas:

A. Halla cuál es el número de dos cifras si sabemos que la suma de sus dos cifras es 10 y que si se invierte el orden de sus cifras resulta otro número que es igual a 26 más dos veces el primer número.

B. Halla un número de dos cifras sabiendo que su cifra de las decenas es el triple de su cifra de las unidades. Si se invierte el orden de sus cifras, dicho número disminuye en 54.

C. Halla un número de dos cifras sabiendo que su cifra de las unidades menos su cifra de las decenas es igual a 3. Si se invierte el orden de sus cifras resulta otro número que es igual a 2 más dos veces el primer número.

D. Halla un número de dos cifras sabiendo que su cifra de las unidades es el doble de su cifra de las decenas. Si se invierte el orden de sus cifras dicho número aumenta en 36.

E. La suma de dos números es 12 y su cociente es 3. Halla estos números.

F. La suma de las dos cifras de un número es 10 y la cifra de las decenas es cuádruple de la cifra de las unidades. Halla el número.

2. Problemas sobre edades

PROBLEMA 1

La edad de María es doble que la edad de Julia. Hace 10 años la suma de las edades de las dos era igual a la edad actual de María.

¿Cuál es la edad actual de María? ¿Y la de Julia?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos:

$x \rightarrow$ edad actual de María.

$y \rightarrow$ edad actual de Julia.

Según el enunciado:

$$x = 2y \quad [1]$$

$x - 10 \rightarrow$ Edad de María hace 10 años.

$y - 10 \rightarrow$ Edad de Julia hace 10 años.

Según el enunciado:

$$(x - 10) + (y - 10) = x \quad [2]$$

Las dos ecuaciones [1] y [2] forman este sistema:

$$\begin{cases} x = 2y \\ (x - 10) + (y - 10) = x \end{cases}$$

② RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} x = 2y \\ (x - 10) + (y - 10) = x \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación x por su valor $(2y)$ obtenido en la primera ecuación, resulta la siguiente ecuación con una sola incógnita:

$$(2y - 10) + (y - 10) = 2y$$
$$2y + y - 2y = 10 + 10$$
$$y = 20$$

Luego x será:

$$x = 2 \cdot 20 = 40$$

③ COMPROBACIÓN

Los dos valores:

$x = 40 \rightarrow$ edad de María

$y = 20 \rightarrow$ edad de Julia

son válidos, porque son números naturales que verifican las condiciones del problema.

Primera condición

$x = 2y \rightarrow 40 = 2 \cdot 20$

Segunda condición

$(x - 10) + (y - 10) = x$

$(40 - 10) + (20 - 10) = 40$

La edad actual de María es 40 años, y la de Julia es 20 años.

1. Resuelve los siguientes problemas:

A. Halla las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendría la edad del menor.

Completa el planteamiento:

Sea x la edad del hermano mayor
Sea y la edad del hermano menor $\rightarrow x + 2 = 5y$

Resuelve el sistema y después haz la comprobación.

B. La edad de un padre es doble que la de su hijo. Hace diez años la edad del padre era triple que la del hijo.

¿Cuáles son las edades actuales del padre y del hijo?

C. La edad de Pedro era doble que la edad de Luis hace un año.

Cuando pasen 9 años la edad de Pedro será $\frac{4}{3}$ de la edad de Luis.

¿Qué edad tiene actualmente cada uno?

D. La edad de un padre es cuatro veces mayor que la edad de su hijo, pero hace seis años la edad del padre era siete veces mayor.

¿Cuál es la edad actual de ambos?

3. Problemas de mezclas

PROBLEMA 1

Por 560 ptas. se han comprado 6 kg de azúcar de la clase A y 2 kg de azúcar de la clase B. Se mezcla 1 kg de azúcar de cada clase y se obtiene una mezcla que vale 75 ptas. el kg.

¿Cuánto vale el kilogramo de azúcar de la clase A? ¿Y el de la clase B?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos:

x → precio del kg azúcar clase A.

y → precio del kg azúcar clase B.

$6x$ → valor de 6 kg azúcar clase A.

$2y$ → valor de 2 kg azúcar clase B.

Según las condiciones del enunciado resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 560 \\ \dfrac{x + y}{2} = 75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 560 \\ x + y = 150 \end{cases}$$

② RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} 6x + 2y = 560 \\ x + y = 150 \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción se obtiene:

$$\begin{array}{r} 6x + 2y = 560 \\ -2x - 2y = -300 \\ \hline 4x = 260 \end{array} \longrightarrow x = 65$$

Hallamos el valor de y:

$$65 + y = 150 \longrightarrow y = 85$$

③ COMPROBACIÓN

El precio de 1 kg de azúcar de clase A es $x = 65$ pesetas.

El precio de 1 kg de azúcar de clase B es $y = 85$ pesetas.

Estos valores de x y de y son válidos porque verifican:

Primera condición

$$6 \times 65 + 2 \times 85 = 390 + 170 = 560$$

Segunda condición

$$\frac{65 + 85}{2} = 75$$

El kilogramo de azúcar de clase A vale 65 ptas. y el kilogramo de clase B vale 85 ptas.

PROBLEMA 2

Se mezcla café de la clase A a 600 ptas. el kg con café de la clase B a 400 ptas. y se obtienen 8 kg de mezcla.

¿Cuántos kilogramos se han mezclado de cada clase sabiendo que el precio del café mezclado es 450 ptas. el kilogramo?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos:

x → el número de kilogramos de café de la clase A.

y → el número de kilogramos de café de la clase B.

$600x$ → valor de los kilogramos de café de clase A.

$400y$ → valor de los kilogramos de café de clase B.

Del enunciado resulta el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ \dfrac{600x + 400y}{8} = 450 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} x + y = 8 \\ 600x + 400y = 3.600 \end{cases}$$

② RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 600x + 400y = 3.600 \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción se obtiene:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 600x + 400y = 3.600 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -400x - 400y = -3.200 \\ 600x + 400y = 3.600 \\ \hline 200x = 400 \end{array} \longrightarrow x = 2$$

Ahora averiguamos el valor de y:

$$y = 8 - x = 8 - 2 = 6$$

③ COMPROBACIÓN

Se mezclan:

$x = 2$ kg de café de la clase A.

$y = 6$ kg de café de la clase B.

Se comprueba que estos resultados son válidos porque verifican las condiciones del problema.

Primera condición

$$x + y = 8 \longrightarrow 2 + 6 = 8$$

Segunda condición

$$\frac{600x + 400y}{8} = \frac{600 \cdot 2 + 400 \cdot 6}{8} = 450$$

Se mezclaron 2 kg de la clase A y 6 kg de la clase B.

4. Problemas de porcentajes

PROBLEMA 1

Un comerciante compra un pañuelo y una bufanda por 2.000 ptas. y los vende por 2.260 ptas.

¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del pañuelo ganó el 10 por 100 y en la venta de la bufanda ganó el 15 por 100?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos:

$x \rightarrow$ el coste del pañuelo.

$y \rightarrow$ el coste de la bufanda.

$$x + y = 2.000$$

Vendió el pañuelo por $x + \frac{10x}{100}$

Vendió la bufanda por $y + \frac{15y}{100}$

Valor de los dos objetos al venderlos:

$$x + \left(\frac{10x}{100}\right) + \left(y + \frac{15y}{100}\right) = 2.260$$

Así resulta $\begin{cases} x + y = 2.000 \\ 110x + 115y = 226.000 \end{cases}$

② RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} x + y = 2.000 \\ 110x + 115y = 226.000 \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción resulta:

$$\left\{\begin{array}{r} -110x - 110y = -220.000 \\ 110x + 115y = 226.000 \\ \hline 5y = 6.000 \end{array}\right.$$

$$y = \frac{6000}{5} = 1.200$$

$$x = 2.000 - 1.200 = 800$$

③ COMPROBACIÓN

El pañuelo cuesta 800 ptas.

La bufanda cuesta 1.200 ptas.

Estos resultados son válidos porque verifican las condiciones del problema.

Primera condición

$$800 + 1.200 = 2.000$$

Segunda condición

$$800 + \frac{10 \cdot 800}{100} = 880$$

$$1.200 + \frac{1200 \cdot 15}{100} = 1.380$$

$$1.380 + 880 = 2.260$$

El pañuelo le costó 800 ptas. y la bufanda le costó 1.200 ptas.

PROBLEMA 2

En un colegio, entre chicos y chicas, hay 300 alumnos. del total asisten a una excursión 155 alumnos. Se sabe que a la excursión han ido el 60 por 100 de los chicos y el 40 por 100 de las chicas.

¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el colegio?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos:

$x \rightarrow$ el número de chicos.

$y \rightarrow$ el número de chicas.

$\frac{60x}{100}$ chicos que van de excursión

$\frac{40y}{100}$ chicas que van de excursión

Del enunciado resultan las siguientes ecuaciones:

$$x + y = 300$$

$$\begin{cases} \frac{60x}{100} + \frac{40y}{100} = 155 \end{cases}$$

② RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 60x + 40y = 15.500 \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción resulta:

$$\begin{array}{r} -40x - 40y = -12.000 \\ 60x + 40y = 15.500 \\ \hline 20x = 3.500 \end{array}$$

$$x = \frac{3500}{20} = 175$$

$$y = 300 - 175 = 125$$

③ COMPROBACIÓN

En el colegio hay 175 chicos y 125 chicas.

Estos resultados son válidos porque verifican las condiciones del problema.

Primera condición

$$175 + 125 = 300$$

Segunda condición

$$\frac{60 \cdot 175}{100} + \frac{40 \cdot 125}{100} =$$

$$= 105 + 50 = 155$$

En el colegio hay 175 chicos y 125 chicas.

5. Problemas sobre grifos o fuentes

En los enunciados de este tipo de problemas suelen aparecer uno o varios grifos. Cada uno de estos grifos tarda un tiempo determinado en llenar un estanque o depósito, y se pide el tiempo que tardarán en llenarlo entre todos.

En otros problemas hay unos grifos que llenan el depósito y unos desagües que al mismo tiempo lo vacían, y se pide también el tiempo que tardan en llenar o vaciar el depósito.

Muchos de estos problemas se pueden resolver utilizando el método aritmético (sin ecuaciones); en cambio, en otros es necesario el método algebraico, o sea, con ecuaciones.

MÉTODO ARITMÉTICO

Una fuente tarda en llenar un estanque 3 horas y otra fuente llena el mismo estanque en 6 horas.

¿Cuánto tiempo tardarán las dos fuentes juntas en llenar el estanque?

- En 1 hora la primera fuente llena $\frac{1}{3}$ del estanque.
- En 1 hora la segunda fuente llena $\frac{1}{6}$ del estanque.
- En 1 hora las dos fuentes juntas llenan $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ del estanque:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

- Para llenar $\frac{1}{2}$ del estanque las dos fuentes tardan 1 hora.
- Para llenar $\frac{2}{2}$ del estanque, es decir, el estanque entero, tardarán 2 horas, o también:

En 1 hora ⟶ 1 parte
En x horas ⟶ 2 partes

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \longrightarrow x = 2 \text{ horas}$$

Las dos fuentes tardan 2 horas en llenar el estanque.

MÉTODO ALGEBRAICO

El grifo A tarda en llenar una piscina 2 horas más que el grifo B. Los dos grifos tardan 2 h y 24 minutos en llenar la piscina.

¿Cuánto tiempo tardará cada grifo en llenar la piscina?

① **PLANTEAMIENTO**

Llamemos:

- x ⟶ a las horas que tarda el grifo B en llenar la piscina.
- $x+2$ ⟶ a las horas que tarda el grifo A en llenar la piscina.
- $\frac{1}{x}$ ⟶ a lo que llena el grifo B en 1 hora.
- $\frac{1}{x+2}$ ⟶ a lo que llena el grifo A en 1 hora.
- Por otra parte, 2 h 24 min $= 2 \text{ h} + \frac{24}{60}\text{h} = 2{,}4$ h.
- Como los dos grifos llenan la piscina en 2,4 horas, en 1 hora llenan $\frac{1}{2{,}4}$ de la piscina.

Lo que llenan los dos grifos en 1 hora

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2{,}4}$$

② **RESOLUCIÓN**

Quitamos denominadores:

$$2{,}4(x+2)+2{,}4x=x(x+2)$$
$$2{,}4x+4{,}8+2{,}4x=x^2+2x$$

$$x^2-2{,}8x-4{,}8=0 \longrightarrow x=\frac{2{,}8\pm\sqrt{2{,}8^2+4\cdot 4{,}8}}{2}=$$

$$=\frac{2{,}8\pm 5{,}2}{2}\begin{matrix}\nearrow 4\\ \searrow -1{,}2\end{matrix}$$

La solución válida es $x = 4$.

El grifo B tarda 4 horas y el grifo A tarda 6 horas.

6. Otros problemas

PROBLEMA 1

¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos:

$x \longrightarrow$ la base del rectángulo.

$y \longrightarrow$ la altura del rectángulo.

Perímetro $\longrightarrow 2x + 2y$.

Como el perímetro mide 16 centímetros, resulta el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ x = 3y \end{cases}$$

② RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ x = 3y \end{cases}$$

Aplicamos el método de sustitución.

Se sustituye en la primera ecuación x por su valor ($3y$). Así resulta una ecuación con la incógnita y solamente:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 3y + 2y = 16 \\ 6y + 2y = 16 \\ \hline 8y = 16 \end{array}$$

$$y = \frac{16}{8} = 2 \text{ cm}$$

$$x = 3 \cdot 2 = 6 \text{ cm}$$

Área del rectángulo:

$6 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$

③ COMPROBACIÓN

Base del rectángulo:

$x = 6$ cm

Altura del rectángulo:

$y = 2$ cm

Se comprueba que estas soluciones verifican las condiciones del problema.

Primera condición

$2 \cdot x + 2 \cdot y = 16$

$2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 16$

Segunda condición

$x = 3 \cdot y$

$6 = 3 \cdot 2$

Área del rectángulo: 12 cm²

PROBLEMA 2

En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 58 cabezas y 168 patas.

¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos:

$x \longrightarrow$ el número de gallinas.

$y \longrightarrow$ el número de conejos.

$2x \longrightarrow$ el número de patas de las gallinas.

$4y \longrightarrow$ el número de patas de los conejos.

$2x + 4y \longrightarrow$ el número total de patas.

Según el enunciado se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

② RESOLUCIÓN

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de reducción:

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -116 \\ 2x + 4y = 168 \\ \hline 2y = 52 \end{array}$$

$$y = \frac{52}{2} = 26$$

$$x = 58 - 26 = 32$$

③ COMPROBACIÓN

Hay 32 gallinas $\longrightarrow x = 32$.

Hay 26 conejos $\longrightarrow y = 26$.

Estos resultados son válidos porque cumplen las condiciones del enunciado.

Primera condición

$32 + 26$ cabezas $= 58$ cabezas

Segunda condición

$$\begin{array}{r} 32 \times 2 = 64 \\ 26 \times 4 = 104 \\ \hline 168 \text{ patas} \end{array}$$

En el corral hay 26 conejos y 32 gallinas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se divide un ángulo recto en dos ángulos. Sabiendo que uno es el doble del otro menos 3 ¿cuánto medirá cada ángulo?

2. Halla dos números tales que su suma sea igual a 30 y el doble del primero más el segundo sea igual al doble del segundo.

3. Halla una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ y tal que si a sus dos términos se les resta 1 resulta la fracción $\frac{5}{9}$.

   Nota Designa una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ por $\frac{x}{y}$

4. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que su cifra de las decenas es igual a 5 menos la cifra de sus unidades y que si se invierte el orden de sus cifras se obtiene un número que es igual al primer número menos 27.

   Recuerda que un número de dos cifras se puede poner como $10x + y$, donde x es la cifra de las decenas e y la cifra de las unidades.

5. Juan y Pedro tienen entre los dos 40 canicas. Juan le dice a Pedro: «Dame 4 canicas y así tendré las mismas que tú».

   ¿Cuántas canicas tendrá cada uno?

6. Se tienen dos depósitos de agua. El contenido en litros del primero es igual a $\frac{3}{4}$ del contenido del segundo, mientras que el contenido del primero más 20 litros es igual al contenido del segundo.

   ¿Cuántos litros contiene cada depósito?

7. Tenemos distribuidas en dos bolsas A y B un total de 50 bolas.

   Si pasamos 5 bolas de la bolsa B a la bolsa A, el número de bolas de A es 4 veces el número de bolas de B.

   ¿Cuántas bolas hay en cada bolsa?

8. Por la compra de dos artículos hemos pagado 3.500 ptas. Si en el primer objeto nos hubieran hecho un descuento del 10 por 100 y en el segundo un descuento del 8 por 100 hubiéramos pagado 3.170 ptas.

   ¿Cuál es el precio de cada artículo?

9. En una clase hay 60 alumnos entre chicos y chicas. Usan gafas el 16 por 100 de los chicos y el 20 por 100 de las chicas. Si el número total de alumnos que usan gafas es 11 ¿cuántos chicos y chicas hay en la clase?

10. En dos vasijas tenemos en la primera doble cantidad de agua que en la segunda.

    Sacando de la primera 40 litros y de la segunda 10 litros, quedan en ambas igual número de litros.

    ¿Cuántos litros había en cada vasija?

11. Se ha comprado un terreno de 100 m² por una cantidad de 90.000 ptas. Un cierto número de metros cuadrados fueron vendidos a 800 ptas. el metro cuadrado y el resto a 1.200 ptas. el metro cuadrado.

    ¿Cuántos metros cuadrados fueron vendidos a 800 ptas. y cuántos a 1.200 ptas.?

12. Hace 3 años la edad de Juan era doble que la edad de Pedro. Dentro de 7 años la edad de Juan será $\frac{4}{3}$ de la edad de Pedro.

    ¿Cuántos años tienen en la actualidad Juan y Pedro?

    Sugerencia Llamar: x = edad actual de Juan.
    y = edad actual de Pedro.

13. Antonio dice a Pedro: «El dinero que tengo es doble del que tienes tú», y Pedro contesta: «Si tú me das seis pesetas tendremos los dos igual cantidad».

    ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. El número de empleados que hay en una oficina es 120. Sabiendo que el número de hombres es el doble que el de mujeres ¿cuántos hombres y mujeres trabajan en dicha oficina?

2. Una señora compra dos electrodomésticos por valor de 85.000 ptas. Uno de ellos le ha costado 18.000 ptas. más que el otro.

¿Cuál es el precio de cada uno?

3. Juan ha comprado 3 bolígrafos y 4 cuadernos, que le han costado 260 ptas., y Pedro ha comprado 2 bolígrafos y 5 cuadernos y le han costado 290 ptas.

¿Cuál es el precio de un bolígrafo y de un cuaderno?

4. Un señor ha pagado una deuda de 4.500 pesetas con billetes de 1.000 ptas. y billetes de 500 ptas. El total de billetes que ha entregado es 7.

¿Cuántos billetes de cada clase entregó?

5. Un padre desea repartir entre sus dos hijos la cantidad de 10.000 ptas. Al hijo mayor le quiere dar 2.000 ptas. más que al pequeño.

¿Cuánto le corresponderá a cada uno?

6. Un padre desea repartir entre sus hijos una cantidad de dinero, Si da a cada hijo 2.000 ptas. le faltan 500 ptas., y si da a cada hijo 1.500 ptas. le sobran 2.000 ptas.

¿Cuántos hijos tiene y cuál es la cantidad de dinero a repartir?

7. Un comerciante ha vendido en un día un cierto número de artículos A a un precio de 2.000 ptas. y un número de artículos B a 1.500 ptas. Al final del día tenía en caja un total de 12.000 ptas. Vendió un total de 7 artículos entre A y B.

¿Cuántos vendió de cada clase?

8. En una reunión de chicos y chicas el número de chicos es el doble que el de chicas. Si se van 3 chicas y 5 chicos el número de chicos es el triple del de chicas.

¿Cuántos chicos y chicas había en la reunión?

9. Un frutero ha vendido 15 cajas de manzanas y 12 cajas de naranjas por 14.700 pesetas.

¿Cuál es el precio de una caja de manzanas y una caja de naranjas sabiendo que una caja de naranjas cuesta 100 ptas. más que una de manzanas?

10. Hemos hecho un pedido a un almacén de 20 kg de un artículo A y 10 kg de un artículo B, costándonos 8.100 ptas.

¿Cuánto nos costaría un pedido de 3 kg de A y 5 kg de B, si un kilogramo de cada artículo nos costó 500 ptas.?

11. En una fiesta de cumpleaños se reparte en partes iguales un cierto número de pasteles entre las 10 personas presentes.

Más tarde llega otra persona y entonces hay que dar a cada uno un pastel menos, sobrando 7 pasteles.

Calcula los pasteles que corresponden a cada persona y cuántos había en total.

Sugerencia x = pasteles que corresponden a cada uno (cociente).

y = pasteles que había en total (dividendo).

Aplicar Dividendo es igual a divisor por cociente más resto.

12. Se mezcla vino de 48 pesetas con vino de 60 pesetas el litro para obtener 1.200 litros de mezcla de vino a 50 pesetas el litro.

¿Cuántos litros se han de tomar de cada clase?

13. Un recipiente se llena con un grifo en 4 horas; otro grifo sólo lo llena en 2 horas, y un tubo de desagüe lo vacía en 3 horas.

¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el recipiente si se abren el tubo de desagüe y los dos grifos?

14. Un tratante tiene dos ovejas y un perro, que valen en total 15.000 pesetas. La primera oveja con el perro vale el doble que la otra oveja, y esta última y el perro valen 6.000 pesetas.

¿Cuánto valen cada oveja y el perro?

TEMA 17 MONOMIOS. OPERACIONES CON MONOMIOS

1. Funciones monomio. Monomios. I

Conceptos de función monomio y de monomio.

FUNCIONES MONOMIO Y MONOMIOS

Funciones monomio	Monomios
$h(x) = 2x^2$	$2x^2$
$g(x) = -3x^4$	$-3x^4$
$f(x) = ax^n$	ax^n

Observa las funciones de variable racional **h** y **g**, cuyas ecuaciones respectivas son:

$$h(x) = 2x^2 \qquad g(x) = -3x^4$$

Las funciones **h** y **g** se llaman **funciones monomio.**

- El criterio de formación de las imágenes de la función $h(x) = 2x^2$ es $2x^2$.

  La expresión algebraica $2x^2$ se llama **monomio.**

- El criterio de formación de las imágenes de la función $g(x) = -3x^4$ es $-3x^4$. La expresión algebraica $-3x^4$ es también un monomio.

En general, una función de variable racional f definida por $f(x) = ax^n$, donde a es un número racional y n es un número natural, se llama función monomio.

El criterio de formación de las imágenes de la función $f(x) = ax^n$ es ax^n. La expresión algebraica ax^n se llama **monomio.**

Coeficiente y grado de un monomio.

COEFICIENTE Y GRADO DE UN MONOMIO

Monomio	Coeficiente	Grado
ax^n	a	n
$2x^2$	2	2
$-3x^4$	-3	4
$\frac{4}{5}x^3$	$\frac{4}{5}$	3

En la función monomio $f(x) = ax^n$ el número racional **a** se llama **coeficiente de la función monomio,** o también **coeficiente del monomio ax^n.**

Ejemplos

- El coeficiente del monomio $-3x^2$ es -3.
- El coeficiente del monomio $\frac{4}{5}x^3$ es $\frac{4}{5}$

En la función monomio $f(x) = ax^n$ el exponente **n**, cuando **a** es distinto de cero ($a \neq 0$) se llama **grado de la función monomio f,** o también **grado del monomio ax^n.**

Ejemplos

- El grado del monomio $-3x^2$ es 2.
- El grado del monomio $\frac{4}{5}x^3$ es 3.

1. Considera las funciones:

$f(x) = 5x^2$ $\quad h(x) = \frac{10}{3}x^4$ $\quad r(x) = -13x^6$ $\quad q(x) = \frac{-2}{3}x^5$

$g(x) = \frac{-1}{2}x$ $\quad m(x) = -6x^3$ $\quad p(x) = 7x^2$ $\quad s(x) = -6x^4$

Escribe el monomio correspondiente a las funciones monomio, el coeficiente y el grado de cada monomio.

2. Funciones monomio. Monomios. II

Monomios constantes y monomio nulo.

FUNCIONES CONSTANTES Y MONOMIOS CONSTANTES

Funciones constantes	Monomios constantes	Grado
$f(x) = a$	a	0
$g(x) = 2$	2	0
$h(x) = 3$	3	0

Función nula	Monomio nulo	Grado
$f(x) = 0$	0	No tiene grado

En el caso particular de que en la función monomio $f(x) = ax^n$ sea a distinto de cero ($a \neq 0$) y sea n igual a cero ($n = 0$), resulta la función constante $f(x) = a$, ya que $f(x) = ax^0$, y $x^0 = 1$.

En este caso el monomio correspondiente $ax^0 = a$ se reduce a una constante.

Observa que los monomios constantes no nulos tienen de grado cero.

Consideremos ahora el caso particular de que en la función monomio $f(x) = ax^n$ sea $a = 0$. Así obtenemos la función nula $f(x) = 0$. En este caso el monomio correspondiente es el número 0, y se llama **monomio nulo.**

La función monomio nula $f(x) = 0$, así como el monomio nulo 0, no tienen grado.

La razón de no asignar ningún grado al monomio 0 es que se puede escribir así: $0x^n$, para cualquier número n, es decir, $0x$, $0x^2$, $0x^3$, etc., con lo cual no tendríamos un exponente fijo para la variable.

1. Completa la tabla poniendo el coeficiente y el grado de los monomios que se indican:

Monomios	$3x^2$	$-4x^3$	$\frac{1}{2}x^5$	$-\frac{3}{4}x^6$	$\frac{5}{2}x$	4	$-6x^3$	$2x$
Coeficiente	3							
Grado	2							

2. Escribe un monomio tal que:

a) Su coeficiente sea 3 y su grado 4.

b) Su coeficiente sea $-\frac{3}{4}$ y su grado 2.

c) Su coeficiente y su grado sean 5.

d) Escribe un monomio que no tenga grado. ¿Cuál es este monomio?

3. Di si es correcto el grado de los siguientes monomios:

a) $-2x^3 \longrightarrow$ grado 3.

b) $\frac{4}{3}x^2 \longrightarrow$ grado 2.

c) $5x^4 \longrightarrow$ grado 5.

d) $-x \longrightarrow$ grado 1.

e) $-4x \longrightarrow$ grado 0.

f) $5 \longrightarrow$ grado 0.

g) $-5x^5 \longrightarrow$ grado 5.

h) $6x^2 \longrightarrow$ grado 6.

i) $-1 \longrightarrow$ grado 0.

3. Suma de monomios

Monomios semejantes.

Monomios semejantes		Monomios no semejantes	
$4x^5$	$-3x^5$	$3x^3$	$2x^4$
$2x^4$	$-6x^4$	$3x^5$	$5x^6$
		$2x$	$2z$

Sean estas dos parejas de monomios:

$-2x^3$, $5x^3$ y $-2x^3$, $4x^2$

Observa que los monomios $-2x^3$ y $5x^3$ tienen la misma letra y están elevados al mismo exponente, es decir, los monomios $-2x^3$ y $5x^3$ tienen el mismo grado. Por eso decimos que los monomios $-2x^3$ y $5x^3$ son **monomios semejantes.**

En cambio, los monomios $-2x^3$ y $4x^2$ no son monomios semejantes, porque no tienen el mismo grado.

Cómo se suman monomios.

SUMA DE MONOMIOS

$4x^4 + 8x^4 = 12x^4$

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n$$

Sean estos dos monomios semejantes:

$8x^3$ $\quad$ $10x^3$

La suma de estos monomios semejantes es otro monomio semejante a ellos cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes.

Así, pues, nos quedará:

$8x^3 + 10x^3 = 18x^3$

En general: $ax^n + bx^n = (a + b)x^n$.

Observa el ejemplo resuelto.

Si los monomios no son semejantes, como $2x^3$ y $3x^5$, entonces la suma $2x^3 + 3x^5$ no es un monomio.

La suma de monomios no semejantes se estudia en el siguiente tema.

Para sumar dos monomios semejantes se suman los coeficientes y se deja la misma parte literal.

1. Indica cuáles de los siguientes monomios son semejantes:

a) $2x^3$ $\quad$ c) $-6x^2$ $\quad$ e) $-2x$ $\quad$ g) $\frac{4}{5}x^3$

b) $4x^4$ $\quad$ d) $\frac{4}{5}x$ $\quad$ f) $-\frac{1}{2}x^2$ $\quad$ h) $-10x^4$

2. Efectúa las siguientes sumas de monomios:

a) $5x^4 + 6x^4 = \ldots$ $\quad$ d) $2x^5 + 6x^5 + 4x^5 = \ldots$ $\quad$ g) $3x^6 + 5x^6 + x^6$

b) $2x^3 + 7x^3 + x^3 = \ldots$ $\quad$ e) $7x + 6x + 3x = \ldots$ $\quad$ h) $5x^3 + 4x^3 + 2x^3$

c) $5x^2 + 4x^2 = \ldots$ $\quad$ f) $2x^2 + 4x^2 + x^2 = \ldots$ $\quad$ i) $3x + 5x + x$

4. Resta de monomios

Monomios opuestos.

MONOMIOS OPUESTOS

Monomio + Su opuesto = Monomio nulo

- $5x^2 + (-5x^2) = 0$
- $-3x + 3x = 0$

Vamos a sumar estos monomios semejantes $3x^4$ y $-3x^4$:

$$3x^4 + (-3x^4) = 0$$

Como la suma de estos dos monomios es el monomio 0, se dice que los monomios $3x^4$ y $-3x^4$ son **monomios opuestos.** También se dice que $-3x^4$ es el opuesto del monomio $3x^4$.

Cómo se restan monomios.

RESTA DE MONOMIOS

- $4x^6 - (-8x^6) = 4x^6 + 8x^6 = 12x^6$
- $-7x^4 - (-10x^4) = -7x^4 + 10x^4 = 3x^4$

$$ax^n - bx^n = (a - b)x^n$$

Para restar dos monomios semejantes se suma al minuendo el opuesto del sustraendo:

$$\underbrace{4x^2}_{\text{Minuendo}} - \underbrace{(-5x^2)}_{\text{Sustraendo}} = 4x^2 + \underbrace{(5x^2)}_{\text{Opuesto del sustraendo}} = 9x^2$$

Se observa que se pueden restar los monomios semejantes restando los coeficientes:

$$4 - (-5) = 9$$

En general: $ax^n - bx^n = (a - b)x^n$.

Observa los ejemplos resueltos.

Para restar dos monomios semejantes se restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

1. Escribe el monomio opuesto del monomio $-\frac{4}{3}x$ y súmalos.

¿Qué monomio obtienes?

2. Efectúa las siguientes diferencias de monomios reduciéndolos a sumas:

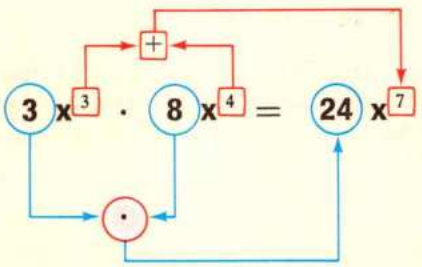
a) $2x^2 - 4x^2 = \ldots$
b) $3x^3 - 8x^3 = \ldots$
c) $4x - 2x = \ldots$
d) $4x^4 - 3x^4 = \ldots$
e) $-8x^2 - 10x^2 = \ldots$
f) $3x^3 - (-8x^3) = \ldots$
g) $2x^4 - (-8x^4) = \ldots$
h) $-5x^2 - 3x^2 = \ldots$
i) $-5x - (-8x) = \ldots$

3. Efectúa las siguientes diferencias de monomios, indicando el coeficiente y el grado del monomio resultante:

a) $5x^5 - 4x^5 = \ldots$
b) $-8x^3 - 7x^3 = \ldots$
c) $-2x^6 - (-5x^6) = \ldots$
d) $10x^4 - (-14x^4) = \ldots$
e) $-5x^2 - 10x^2 = \ldots$
f) $8x - (-16x) = \ldots$

5. Producto de monomios

PRODUCTO DE MONOMIOS



- $6x^2 \cdot (-7x^3) = -42x^5$
- $-4x \cdot (-8x^2) = 32x^3$

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}$$

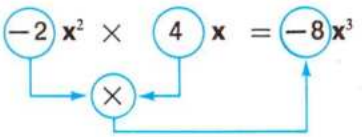
Cómo se multiplican monomios.

Sean los monomios siguientes:

$$-2x^2 \qquad 4x$$

El producto de estos monomios es otro monomio cuyo grado es la suma de sus grados y cuyo coeficiente es el producto de sus coeficientes.

(Recuerda que para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se pone como exponente la suma de los exponentes.)
Así pues quedará:



En general: $ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}$

Observa los ejemplos resueltos.

1. Efectúa los siguientes productos:

a) $5x \cdot (-2x^2) \cdot (-x) = \ldots$
b) $10x^3 \cdot 2x^2 \cdot (-4x) = \ldots$
c) $5x \cdot (-4x) \cdot 2x = \ldots$
d) $3x^2 \cdot 6x \cdot (-x^2) = \ldots$
e) $2x^2 \cdot 3x = \ldots$
f) $5x \cdot (-3x) = \ldots$

2. Efectúa los siguientes productos y di el coeficiente y el grado del monomio resultante:

a) $4x^2 \cdot (-2x) \cdot x = \ldots$
b) $x^2 \cdot x \cdot (-3x) = \ldots$
c) $2x \cdot (-2x) \cdot 2x = \ldots$
d) $\frac{4}{3}x^2 \cdot (-2x) = \ldots$
e) $\frac{4}{5}x^2 \cdot \frac{2}{3}x = \ldots$
f) $\frac{5}{4}x \cdot \frac{6}{5}x^2 = \ldots$
g) $-5x^3 \cdot 2x^2 = \ldots$
h) $6x^2 \cdot (-2x^3) = \ldots$
i) $x \cdot (-7x^2) = \ldots$

3. Dados los siguientes monomios:

a) $-2x^2$
b) $4x$
c) $5x^3$
d) $-4x$
e) $4x^3$
f) $-2x$
g) $7x^2$
h) $-10x^2$
i) $-6x$
j) $8x^2$

Multiplica cada uno de ellos por su opuesto.

¿Cómo será el coeficiente del monomio producto, positivo o negativo?

4. Efectúa los siguientes productos y di cuál es el coeficiente del monomio resultante:

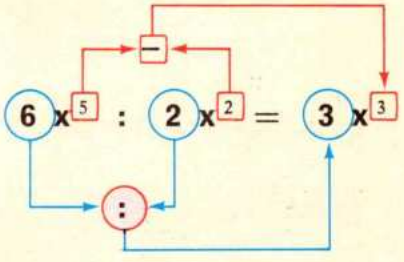
a) $\frac{3}{2}x \cdot \frac{2}{3}x^2 = \ldots$
b) $\frac{4}{5}x^3 \cdot \left(-\frac{4}{5}x^4\right) = \ldots$
c) $2x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^3\right) = \ldots$
d) $-3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x\right) = \ldots$

6. División de monomios

Cómo se dividen monomios.

DIVISIÓN DE MONOMIOS

- $\dfrac{-40x^4}{8x^2} = -5x^2$
- $\dfrac{14x^3}{2x} = 7x^2$
- $\dfrac{-8x^4}{-2x^3} = 4x$
- $\dfrac{18x^6}{-3x^4} = -6x^2$



$$\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m}$$

Si $b \neq 0$ y $n > m$

Considera el siguiente producto de monomios:

$$-2x^2 \cdot 4x = -8x^3$$

De este producto podemos obtener dos cocientes:

a) Dividendo $-8x^3$, Divisor $4x$: $\dfrac{-8x^3}{4x} = -2x^2$

b) Dividendo $-8x^3$, Divisor $-2x^2$: $\dfrac{-8x^3}{-2x^2} = 4x$

Cocientes

Observa que tanto el cociente a) como el cociente b) son un monomio cuyo coeficiente es el cociente entre los coeficientes del dividendo y del divisor y cuyo grado es la diferencia de sus grados.

Recuerda que para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

Observa los ejemplos resueltos.

Conviene hacer dos observaciones acerca de la división de monomios:

a) Como para dividir dos monomios hay que dividir sus coeficientes, entonces el coeficiente del monomio divisor no puede ser cero, es decir, para poder dividir dos monomios **el monomio divisor no puede ser cero.**

b) Como el grado del cociente es la diferencia entre los grados del dividendo y del divisor y el grado de un monomio es mayor o igual que cero, resulta que para poder dividir dos monomios **el grado del monomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del divisor.**

En general:

$$\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m} \qquad \text{si } b \neq 0 \text{ y } n > m$$

1. Efectúa las siguientes divisiones de monomios:

a) $\dfrac{50x^4}{25x^2} = \ldots$ c) $\dfrac{-15x^3}{5x^2} = \ldots$ e) $\dfrac{-18x^2}{-5x} = \ldots$

b) $\dfrac{25x^3}{5x} = \ldots$ d) $\dfrac{-45x^4}{9x} = \ldots$ f) $\dfrac{-7x^4}{-3x^3} = \ldots$

2. El cociente de dos monomios $\dfrac{a(x)}{5x^3}$ es igual a $-3x^2$.

Halla el monomio $a(x)$.

7. Potencia de un monomio

Cómo se eleva un monomio a una potencia.

POTENCIA DE UN MONOMIO

- $(4x^3)^3 = 4^3(x^3)^3 = 64x^9$
- $(-2x^2)^2 = (-2)^2(x^2)^2 = 4x^4$
- $\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2(x^3)^2 = \frac{4}{9}x^6$

$$(ax^n)^m = a^m \cdot x^{n \cdot m}$$

Sea el monomio $-2x^4$.

Vamos a calcular el cuadrado de este monomio, es decir, $(-2x^4)^2$.

Calcular la potencia de un monomio se reduce a calcular la potencia de un producto. Recuerda que para elevar un producto a una potencia se eleva cada factor a dicha potencia:

$$(-2x^4)^2 = (-2)^2 \cdot (x^4)^2 = 4 \cdot x^8$$

Observa los ejemplos resueltos.

En general: $(ax^n)^m = a^m x^{n \cdot m}$

1. Efectúa las siguientes potencias de monomios:

a) $(2x^2)^3 = \ldots$ d) $\left(-\frac{2}{5}x\right)^2 = \ldots$ g) $(-2x)^4 = \ldots$

b) $(-3x)^2 = \ldots$ e) $\left(\frac{1}{2}x^3\right)^3 = \ldots$ h) $\left(\frac{3}{5}x^2\right)^3 = \ldots$

c) $\left(\frac{1}{4}x^2\right)^4 = \ldots$ f) $(-4x)^4 = \ldots$ i) $(-5x^4)^3 = \ldots$

2. Efectúa las siguientes potencias y di el grado del monomio resultante:

a) $(4x^2)^3 = \ldots$ c) $(-5x^3)^2 = \ldots$ e) $(-2x^3)^4 = \ldots$

b) $(-2x)^4 = \ldots$ d) $(-4x)^3 = \ldots$ f) $(5x^4)^2 = \ldots$

3. Calcula las potencias 2, 3 y 4 del monomio $-3x^3$.

Di el coeficiente y el grado del monomio resultante en cada caso.

4. Piensa y contesta:

A. Si tenemos un monomio de grado 3 y lo elevamos al cuadrado ¿qué grado tendrá el monomio resultante? Pon un ejemplo.

B. Hemos elevado un monomio al cubo y el monomio resultante tiene grado 6.

¿Qué grado tendría el monomio primero? Pon un ejemplo.

5. Escribe un monomio de grado 2 y calcula sus potencias 2, 3 y 4.

¿Cuál será el grado de cada monomio resultante en cada caso?

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe cinco expresiones que sean monomios.

2. Escribe:

   a) Un monomio de coeficiente -3.

   b) Un monomio de grado 4.

   c) Un monomio de coeficiente $-\frac{1}{2}$ y de grado 2.

3. Sea el monomio $-4x$ y supongamos que $x = 5$. Entonces, $-4x = -4 \cdot 5 = -20$.

   Decimos que -20 es el **valor numérico** del monomio $-4x$ para $x = 5$.

   Halla el valor numérico de los siguientes monomios para los valores que se indican:

   a) $5x^3$ para $x = -1$.

   b) $-4x$ para $x = -2$.

   c) $6x^2$ para $x = 1$.

   d) $-8x^4$ para $x = 0$.

   e) $-10x^2$ para $x = -3$.

   f) $7x^3$ para $x = 3$.

4. Completa la tabla:

Monomios	$4x^2$	$-2x^3$	$-\frac{2}{5}x$	$14x^2$	$7x^5$
Coeficiente	4				
Grado	2				

5. De las siguientes funciones, di cuáles son funciones monomio:

   a) $f(x) = 4x + 3$

   b) $f(x) = 5x - 1$

   c) $f(x) = 3x$

   d) $f(x) = -\frac{3}{4}x$

   e) $f(x) = -20$

   f) $f(x) = \frac{3}{5}x + 1$

6. Efectúa las siguientes sumas de monomios:

   a) $3x^2 + 6x^2 + 10x^2 = \ldots$

   b) $8x^3 + \frac{1}{2}x^3 + 5x^3 = \ldots$

   c) $8x^4 + \frac{2}{3}x^4 + 20x^4 = \ldots$

   d) $15x + \frac{3}{2}x + x = \ldots$

7. Efectúa reduciendo las restas a sumas:

   a) $4x^3 - \left(-\frac{3}{2}x^3\right) - \frac{4}{5}x^3 = \ldots$

   b) $3x^2 - 2x^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = \ldots$

   c) $\frac{4}{5}x^4 - \frac{3}{2}x^4 - (8x^4) = \ldots$

   d) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^4 - (-2x^4) = \ldots$

8. Efectúa los siguientes productos:

   a) $4x^2 \cdot (-2x) \cdot \left(-\frac{1}{8}x\right) = \ldots$

   b) $(-3x^2) \cdot (-4x) \cdot 2x = \ldots$

   c) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right) \cdot (-5x^2) = \ldots$

   d) $(-3x^4) \cdot (-2x^3) \cdot (3x^2) = \ldots$

9. Efectúa los siguientes cocientes:

   a) $\frac{4x^3}{-2x^2} = \ldots$

   b) $\frac{-16x^2}{8x^2} = \ldots$

   c) $\frac{-7x^3}{-3x^2} = \ldots$

   d) $\frac{10x^5}{5x^4} = \ldots$

   e) $\frac{20x^4}{-5x^4} = \ldots$

   f) $\frac{-5x^6}{-2x^4} = \ldots$

10. Calcula:

    a) $(-2x^3)^4$ c) $(-2x^4)^3$ e) $(-5x^3)^2$

    b) $(-3x)^5$ d) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^4$ f) $(-7x^3)^3$

TEMA 18 SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

1. Funciones polinómicas y polinomios. I

Función polinómica.

FUNCIONES POLINÓMICAS f, g, h

- $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^3 + x^2$
- $g(x) = 3x^2 - 3x + 2x^2 - x$
- $h(x) = x^2 - x + 1$

Considera la función de variable racional **f**, definida por $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

La función **f** puede considerarse como una suma de las tres funciones monomios f_1, f_2 y f_3:

$$f_1(x) = 3x \qquad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3 \qquad f_3(x) = x^2$$

Por eso se dice que la función **f** es una **función polinómica** o **función polinomio.**

Observa que las funciones de variable racional **g** y **h** son también una suma de funciones monomio, y por tanto son funciones polinómicas.

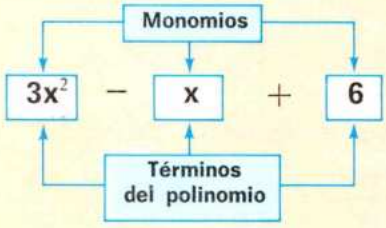
Se llama función polinómica a toda función que es una suma de un número finito de funciones monomios.

Polinomio.

POLINOMIO ASOCIADO A UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

Función polinómica: $f(x) = 3x^2 - x + 6$ — Polinomio: $3x^2 - x + 6$

TÉRMINOS DE UN POLINOMIO



Considera la función polinómica **f**, definida por $f(x) = 3x^2 - x + 6$.

La expresión $3x^2 - x + 6$ es el criterio de la función **f** y nos indica las operaciones que hay que realizar con cualquier número **x** para obtener su imagen. En la función polinómica $f(x) = 3x^2 - x + 6$ la expresión algebraica $3x^2 - x + 6$ se llama **polinomio asociado.**

El polinomio $3x^2 - x + 6$ está formado por una suma de tres monomios.

Cada monomio se dice que es un **término** del polinomio.

Se llama polinomio a toda expresión que es una suma de un número finito de monomios.

1. En la función polinómica $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^3 + x^2$, la imagen de 2 es $f(2) = 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^3 + 2^2 = 6 - 4 + 4 = 6$.

Calcula $f(4)$ y $f(-6)$.

Forma reducida de un polinomio.

POLINOMIOS EN FORMA REDUCIDA

Polinomio dado

$2x^3 - x^2 + 6x^2 - x^3 + 1$

Reducción de términos semejantes

$x^3 + 5x^2 + 1$

Polinomio en forma reducida

COEFICIENTES DE UN POLINOMIO ESCRITO EN FORMA REDUCIDA

Polinomio dado

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$

Coeficientes del polinomio: $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0$

POLINOMIOS MÁS SENCILLOS

- $x^2 - 5x + 6$ → trinomio
- $x^2 - 4x$ → binomio
- $2x$ → monomio

La función polinómica **f**, definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + 6x^2 - x^3 + 1$, se puede simplificar sumando los monomios semejantes:

$$f(x) = (2x^3 - x^3) + (6x^2 - x^2) + 1 = x^3 + 5x^2 + 1$$

Esta simplificación se llama **reducción de términos semejantes.**

La función polinómica obtenida [$f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$] no tiene términos semejantes y se llama **forma reducida** de la función polinómica dada.

El polinomio $x^3 + 5x^2 + 1$ se llama **forma reducida del polinomio** $2x^3 - x^2 + 6x^2 - x^3 + 1$.

En general, una función polinómica **está escrita en forma reducida si es una suma de funciones monomio no nulas de distinto grado.**

La expresión $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$, donde a_n, a_{n-1}, ..., a_1 y a_0 son números racionales, es un polinomio escrito en forma reducida, y los números a_n, a_{n-1}, ..., a_1 y a_0 son los coeficientes del polinomio.

Un polinomio se llama:

- **Trinomio**, si tiene tres términos.
- **Binomio**, si tiene dos términos.
- **Monomio**, si tiene un solo término.

Polinomio nulo o **polinomio cero** es aquel en que todos los coeficientes son cero:

$$0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$$

Un polinomio no nulo se dice que está escrito en forma reducida si está expresado como una suma de monomios no nulos, todos ellos de distinto grado.

1. Indica cuáles de las siguientes funciones son funciones polinómicas:

a) $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$

b) $g(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + 2$

c) $h(x) = \sqrt{x - 1}$

d) $n(x) = x + 3$

e) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

f) $q(x) = -\frac{2}{x} + 3$

2. Escribe los siguientes polinomios en forma reducida:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x^3 - 5x + 6 - x^2$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 6x - x^2 + 3x - 1$

Grado de un polinomio no nulo.

GRADO DE UN POLINOMIO

Polinomio	Grado
$6x + 5x^2 - 4x^3$	Tercero
$x^2 - 8$	Segundo
$2x^5 - x^3 + x - 6$	Quinto

Observa estos polinomios y sus grados.

El polinomio $6x + 5x^2 - 4x^3$ es la suma de los monomios $6x$, $5x^2$ y $-4x^3$, cuyos grados son, respectivamente, 1, 2 y 3. El grado mayor es 3, y por eso decimos que el polinomio es de tercer grado.

Observa que el grado de cada polinomio es el grado del monomio de mayor grado.

Como el monomio cero no tiene grado, resulta que el polinomio cero tampoco tiene grado:

$$0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x^2 + 0x + 0$$

Grado de un polinomio no nulo es el grado del monomio de mayor grado.

Polinomios iguales.

POLINOMIOS IGUALES

- $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $s(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$

Coeficientes iguales:

$a = a'$ $\quad c = c'$

$b = b'$ $\quad d = d'$

Dos polinomios son iguales si cumplen estas condiciones:

1.ª Si tienen el mismo grado.

2.ª Si los coeficientes de los monomios de igual grado son iguales.

Así, los polinomios $3x^2 + 1 - 5x$ y $1 - 5x + 3x^2$ son iguales porque cumplen las dos condiciones anteriores.

Si los polinomios **r(x)** y **s(x)** son iguales deben tener iguales los coeficientes.

Polinomios ordenados.

POLINOMIO ORDENADO EN FORMA CRECIENTE

$$p(x) = 6 - 3x + 5x^2 + 6x^3$$

POLINOMIO ORDENADO EN FORMA DECRECIENTE

$$p(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x + 6$$

Los términos de un polinomio se suelen escribir ordenados según el grado de sus monomios.

El orden puede ser creciente o decreciente.

Observa el polinomio **p(x)**, ordenado en orden creciente y en orden decreciente.

De ahora en adelante siempre escribiremos los polinomios ordenados.

1. Escribe los siguientes polinomios en forma reducida y ordenados en forma decreciente. Después indica el grado de cada uno.

a) $2x^2 - 3x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ b) $-5 + 6x^2 - 3x^4 + x^2 + 3x^4$ c) $4x - 7x^3 + 2$

Polinomios completos. Polinomios incompletos.

POLINOMIOS COMPLETOS Y POLINOMIOS INCOMPLETOS

Grados → 4 → 3 → 2 → 1 → 0

$p(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + x - 6$

Polinomio completo

$q(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 8$

Polinomio incompleto

Observa los polinomios **p(x)** y **q(x)**.

El polinomio **p(x)** tiene un término de cada grado, desde el término de grado 4 al término de grado 0, y por eso se dice que es un **polinomio completo.**

El polinomio **q(x)** es un polinomio incompleto porque le falta el término de grado 2.

Un polinomio de grado n se dice que es completo si tiene un término de cada grado, desde el grado n hasta el grado cero.

Lista ordenada de coeficientes de un polinomio.

LISTA ORDENADA DE COEFICIENTES

Polinomios completos	Lista ordenada de coeficientes
$x + 1$	(1, 1)
$x^2 - 3x + 2$	(1, −3, 2)
$5x^3 - x^2 + 2x - 6$	(5, −1, 2, −6)

Polinomios incompletos	
$x^2 - 3$	(1, 0, −3)
$2x^3 - 5$	(2, 0, 0, −5)

Observa estos polinomios ordenados y la lista de todos sus coeficientes.

A cada polinomio ordenado le corresponde una lista de números que son sus coeficientes.

Fíjate en que cuando el polinomio es incompleto se escribe un cero por cada monomio que le falta.

Observa también que:

- Un polinomio de grado 1 tiene 2 coeficientes.
- Un polinomio de grado 2 tiene 3 coeficientes.
- Un polinomio de grado 3 tiene 4 coeficientes.

En general, en la lista ordenada de coeficientes hay un coeficiente más que el número que indica el grado.

Expresión abreviada de los polinomios.

DETERMINACIÓN DE UN POLINOMIO

Listas ordenadas de coeficientes	Polinomios que determinan
(1, 7)	$x + 7$
(6, −1, −4)	$6x^2 - x - 4$
(2, 0, 0, −3)	$2x^3 - 3$

Si se sobreentiende que la letra que se utiliza es **x**, un polinomio queda determinado simplemente conociendo la lista ordenada de sus coeficientes.

Por ejemplo: ¿Cuál es el polinomio que corresponde a la lista ordenada (5, 0, 1, 2)?

Como hay cuatro coeficientes, el polinomio es de grado 3. Por otra parte, el 0 indica que no hay monomio de segundo grado:

$$(5, 0, 1, 2) \longrightarrow 5x^3 + x + 2$$

Observa estas listas y los polinomios que determinan.

Un polinomio queda determinado con la lista ordenada de sus coeficientes.

5. Suma de polinomios

Cómo se suman los polinomios.

SUMA DE POLINOMIOS

Polinomios dados

$p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 3x + 4$

$q(x) = 12x^4 - 7x^3 + 5x - 2$

① Se escriben de modo que queden en columna los monomios semejantes.

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ 12x^4 - 7x^3 \qquad + 5x - 2 \\ \hline \end{array}$$

② Se suman los monomios semejantes.

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ 12x^4 - 7x^3 \qquad + 5x - 2 \\ \hline p(x) + q(x) = 12x^4 - x^3 + 7x^2 + 2x + 2 \end{array}$$

SUMA EN FORMA ABREVIADA

$$\begin{array}{rl} p \longrightarrow & (6,\ 7,\ -3,\ \ 4) \\ q \longrightarrow & +\ (12,\ -7,\ 0,\ \ 5,\ -2) \\ \hline p + q \longrightarrow & (12,\ -1,\ 7,\ \ 2,\ \ 2) \end{array}$$

Sean los polinomios **p(x)** y **q(x)**.

Para sumar estos polinomios se procede del modo siguiente:

① Se escriben de modo que queden en columna los monomios semejantes.

② Se suman los monomios semejantes.

Así resulta:

$p(x) + q(x) = 12x^4 - x^3 + 7x^2 + 2x + 2$

Si se utiliza la expresión abreviada de los polinomios basta sumar los coeficientes que ocupan el mismo lugar:

$p = (6, 7, -3, 4)$; $q = (12, -7, 0, 5, -2)$

Así resulta $p + q = (12, -1, 7, 2, 2)$

Observa que:

a) La suma de dos polinomios es otro polinomio, es decir, que la suma de polinomios es una operación interna en el conjunto de los polinomios.

b) El grado del polinomio suma es igual o menor que el mayor de los grados de los polinomios sumandos.

Para sumar polinomios primero se escriben de modo que queden en columna los monomios semejantes y a continuación se suman los monomios.

1. **Ordena en forma creciente los polinomios y suma:**

$p(x) = 3x^2 - 6x^3 + 5x^4 + 7x^5$ $\qquad$ $r(x) = x + 6 - 7x^5 + x^4$

$q(x) = 2x^2 - x + 10x^4$ $\qquad$ $s(x) = -3x^2 + 6x^3 - 5x^4 - 7x^5$

a) $p(x) + q(x)$ $\qquad$ c) $p(x) + s(x)$ $\qquad$ e) $r(x) + s(x)$

b) $p(x) + r(x)$ $\qquad$ d) $q(x) + s(x)$ $\qquad$ f) $q(x) + r(x)$

2. **Dados dos polinomios $a = (2, -1, 0, 4)$ y $b = (-1, 3, 0, -1)$, escritos en forma abreviada, calcula la suma $a + b$.**

3. **Suma estos polinomios:**

$r(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ y $q(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 3$.

Compara después el grado del polinomio $r(x) + q(x)$ con el grado de los polinomios sumandos.

6. Propiedades de la suma de polinomios

Propiedades conmutativa y asociativa de la suma de polinomios.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$a(x) + b(x) = b(x) + a(x)$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$[a(x) + b(x)] + c(x) = a(x) + [b(x) + c(x)]$$

Considera estos polinomios:

$$a(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$$
$$b(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$$
$$c(x) = 3x^2 + 4x + 3$$

Comprueba con los polinomios $a(x)$ y $b(x)$ que se verifica la propiedad conmutativa, es decir, que el orden de los sumandos no altera la suma:

$$a(x) + b(x) = b(x) + a(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$$

Comprueba que también se verifica la propiedad asociativa.

$$[a(x) + b(x)] + c(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 4$$
$$a(x) + [b(x) + c(x)] = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 4$$

El resultado de la suma $a(x) + b(x) + c(x)$ no depende de la forma en que se asocien los sumandos:

Elemento neutro de la suma de polinomios.

ELEMENTO NEUTRO

Polinomio cero $\quad 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0 = 0$

$$\begin{array}{r} p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ 0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\ \hline p(x) + 0 = 6x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \end{array}$$

En la suma de polinomios el elemento neutro es el polinomio cero.

En efecto: dado un polinomio, se observa que si le sumamos el polinomio cero resulta el mismo polinomio. Por ejemplo $p(x) = 6x^3 + 7x^2 - 3x + 4$ sumado con $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ da el polinomio $p(x)$.

Polinomios opuestos.

SUMA DE UN POLINOMIO CON SU OPUESTO

$$\begin{array}{r} p(x) = \quad 3x^2 - 5x + 6 \\ -p(x) = -3x^2 + 5x - 6 \\ \hline p(x) + [-p(x)] = \quad 0x^2 + 0x + 0 \end{array}$$

Sea el polinomio $p(x) = 3x^2 - 5x + 6$.

Llamemos $-p(x)$ al polinomio que se obtiene cambiando el signo a los coeficientes de todos sus términos:

$$-p(x) = -3x^2 + 5x - 6$$

La suma de estos dos polinomios es el polinomio cero:

$$p(x) + [-p(x)] = 0x^2 + 0x + 0$$

Por esta razón se dice que el polinomio $-p(x)$ es el opuesto de $p(x)$, y también se dice que los polinomios $p(x)$ y $-p(x)$ son polinomios opuestos.

Dos polinomios son polinomios opuestos cuando su suma es el polinomio cero.

7. Resta de polinomios

Cómo se restan polinomios.

RESTA DE POLINOMIOS

Minuendo $p(x) = x^2 - 2x + 4$

Sustraendo $q(x) = x^3 - 3x + 6$

$$\begin{array}{r} p(x) = x^2 - 2x + 4 \\ -q(x) = -x^3 + 3x - 6 \\ \hline p(x) - q(x) = -x^3 + x^2 + x - 2 \end{array}$$

Diferencia $-x^3 + x^2 + x - 2$

Dados dos polinomios **p(x)** y **q(x)** se llama resta del polinomio **p(x)** y el polinomio **q(x)** a la operación de sumar **p(x)** con el opuesto de **q(x)**:

$$p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)]$$

El polinomio $p(x) - q(x) = -x^3 + x^2 + x - 2$ se llama **polinomio diferencia.**

Para restar dos polinomios se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

1. Dados estos polinomios:

$a(x) = -3x^4 - 5x^2 + 1$ $\quad$ $c(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 6$ $\quad$ $e(x) = x^2 - x + 1$

$b(x) = x^3 - 6x + 3$ $\quad$ $d(x) = -x^3 + 6x + 4$ $\quad$ $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

a) Escribe los polinomios opuestos de los anteriores.

b) Suma cada polinomio con su opuesto.

c) Calcula un polinomio $p(x)$ tal que $a(x) + p(x) = x^2 - 1$.

d) Calcula un polinomio $q(x)$ tal que $b(x) - q(x) = 3x^3 - x + 2$.

e) Calcula un polinomio $r(x)$ tal que $a(x) + b(x) - r(x) = c(x)$.

f) Calcula un polinomio $s(x)$ tal que $c(x) + d(x) - s(x) = 0$.

2. Con los polinomios del ejercicio anterior, calcula:

a) $a(x) - b(x)$ $\quad$ c) $[a(x) + b(x)] - [c(x) + d(x)]$ $\quad$ e) $e(x) + f(x)$

b) $a(x) - c(x)$ $\quad$ d) $[a(x) + d(x)] - [b(x) + c(x)]$ $\quad$ f) $e(x) - f(x)$

3. Contesta:

¿Qué polinomio se ha de restar al polinomio $p(x) = 3x^2 - 5x + 6$ para obtener $x^3 - 3x + 1$?

4. Sean los polinomios $p(x) = mx^3 - 5x + 6$ y $q(x) = -4x^3 - 6x + 7$.

Calcula el valor de **m** sabiendo que $p(x) + q(x) = x^3 - 11x + 13$.

5. Escribe dos polinomios de tercer grado de tal modo que su suma sea el polinomio cero.

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Ordena los siguientes polinomios y di de qué grado es cada uno.

   Después escríbelos en forma abreviada.

   a) $3x - 2x^2 + 4$ b) $x^3 - 5 + 6x - x^2$

2. Escribe dos polinomios reducidos de segundo grado y comprueba con ellos la conmutatividad de la suma.

3. Dado el polinomio $\mathbf{p(x) = x^2 - 5x + 4}$, escribe el polinomio opuesto $\mathbf{-p(x)}$.

   Calcula los valores numéricos de $\mathbf{p(x)}$ y $\mathbf{-p(x)}$ para $x = 0$, 1 y 2 y comprueba que los valores de $\mathbf{p(x)}$ y de $\mathbf{-p(x)}$ son números opuestos.

4. Dados los polinomios:

   $\mathbf{p(x)} = 4x^2 - 1$

   $\mathbf{q(x)} = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

   $\mathbf{r(x)} = 6x^2 + x + 1$

   $\mathbf{s(x)} = \frac{1}{2}x^2 + 4$

   $\mathbf{t(x)} = \frac{3}{2}x^2 + 5$

   $\mathbf{v(x)} = x^2 + 2$

   calcula:

   a) $\mathbf{p(x) + q(x)}$

   b) $\mathbf{p(x) - v(x)}$

   c) $\mathbf{p(x) + r(x)}$

   d) $\mathbf{p(x) - r(x)}$

   e) $\mathbf{s(x) + t(x) + v(x)}$

   f) $\mathbf{s(x) - t(x) + v(x)}$

5. ¿Qué polinomio tienes que sumar con $x^2 - 4x - 1$ para que la suma sea $5x^3 - 6x$?

6. Dado el polinomio

   $$\mathbf{p(x)} = \frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + 6x - \frac{1}{5},$$

   halla otro polinomio $\mathbf{q(x)}$ tal que

   $$\mathbf{p(x) + q(x)} = 3x^2 + 6x - 1$$

7. Halla el polinomio que hay que restar de $(-6, 8, 4, 0, -1, 0)$ para obtener el polinomio $(0, 0, 6, -4, 8, 12)$.

8. Escribe dos polinomios cualquiera y súmalos. Contesta:

   a) ¿Es mayor el grado de los sumandos o el de la suma? ¿Es igual? ¿Es menor?

   b) ¿Puede en algún caso ser menor el grado de la suma que el grado de los sumandos? ¿Cuándo?

   Justifica tus respuestas con ejemplos.

9. ¿Qué puedes decir del grado de la diferencia de dos polinomios?

10. Dados los polinomios en forma abreviada $\mathbf{p} = (-1, 3, 2, 0)$ y $\mathbf{q} = (3, 0, -1, 4)$, calcula el polinomio $\mathbf{m}$ tal que $\mathbf{p + m = q}$.

11. Escribe dos polinomios de tercer grado de modo que su suma sea el polinomio $\mathbf{p(x)} = 3x^2 - 7x + 4$.

12. La diferencia de dos polinomios $\mathbf{p(x) - q(x)}$ es igual a $x^3 - 5x^2 - 7x + 2$. Calcula $\mathbf{q(x)}$ sabiendo que $\mathbf{p(x)} = x^4 + 5x^3 + 2x - 1$.

13. ¿Qué polinomio hay que sumar al polinomio $\mathbf{a(x)} = x^2 - 6x + 3$ para obtener el polinomio opuesto de $\mathbf{b(x)}$, siendo $\mathbf{b(x)} = -5x^3 + 2x^2 - 4x + 1$?

14. Dados los polinomios

    $\mathbf{p(x)}$ $\mathbf{q(x)}$ $\mathbf{r(x)}$

    $\mathbf{p(x)} = x^4 - 2x^2 + 6x - 1$

    $\mathbf{q(x)} = x^3 - 6x^2 + 4$

    $\mathbf{r(x)} = 2x^4 - 2x - 2$

    calcula:

    a) $\mathbf{p(x) + q(x) - r(x)}$

    b) $\mathbf{p(x) + r(x) - q(x)}$

    c) $\mathbf{q(x) + r(x) - p(x)}$

    d) $\mathbf{p(x) + q(x) + r(x)}$

TEMA 19 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

1. Producto de polinomios. I

POLINOMIO × MONOMIO

$p(x) = 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x + 4 \times a(x) = \frac{1}{5}x^4$

① $4 \cdot \frac{1}{5}x^4 = \frac{4}{5}x^4$

$-5x \cdot \frac{1}{5}x^4 = -x^5$

$\frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{1}{5}x^4 = \frac{1}{15}x^6$

$2x^3 \cdot \frac{1}{5}x^4 = \frac{2}{5}x^7$

② $\frac{2}{5}x^7 + \frac{1}{15}x^6 - x^5 + \frac{4}{5}x^4$

SEMEJANZA DEL PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO CON EL PRODUCTO DE UN NÚMERO DE VARIAS CIFRAS POR OTRO DE UNA

$$\begin{array}{r} 234 \\ \times\ 6 \\ \hline 1200 \\ 180 \\ 24 \\ \hline 1404 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 200 + 30 + 4 \\ \times\ 6 \\ \hline 1200 + 180 + 24 \end{array}$$

Producto de un polinomio por un monomio.

Considera el polinomio **p(x)** y el monomio **a(x)**:

$$p(x) = 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x + 4$$

$$a(x) = \frac{1}{5}x^4$$

Para multiplicar el polinomio **p(x)** por el monomio **a(x)** se procede del modo siguiente:

① Se multiplica cada uno de los monomios del polinomio **p(x)** por el monomio **a(x)**.

② A continuación con los monomios obtenidos se forma un polinomio; el polinomio resultante es el producto **p(x) · a(x)**:

$$p(x) \cdot a(x) = \frac{2}{5}x^7 + \frac{1}{15}x^6 - x^5 + \frac{4}{5}x^4$$

Observa que el grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores:

$$\underbrace{\text{grado de } [p(x) \cdot a(x)]}_{7} = \underbrace{\text{grado } p(x)}_{3} + \underbrace{\text{grado } a(x)}_{4}$$

En la práctica, el producto de un polinomio por un monomio se obtiene del modo siguiente:

$$\begin{array}{l} p(x) = 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x + 4 \\ a(x) = \frac{1}{5}x^4 \\ \hline p(x) \cdot a(x) = \frac{2}{5}x^7 + \frac{1}{15}x^6 - x^5 + \frac{4}{5}x^4 \end{array}$$

Observa el parecido de este producto con el producto de un número de varias cifras por otro de una.

Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica por dicho monomio cada uno de los monomios del polinomio.

El grado del producto de un polinomio por un monomio es igual a la suma de los grados de los factores.

1. Calcula en tu cuaderno los productos que se indican.

En cada caso, indica antes de hacer el producto el grado de cada factor y el grado del producto.

a) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ por $-6x$

b) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ por $\frac{2}{3}x$

c) $2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 6x + 2$ por $\frac{1}{2}x^3$

d) $3x^4 - x^2 + 5$ por $\frac{2}{5}x^2$

2. Producto de polinomios. II

Producto de dos polinomios.

POLINOMIO × POLINOMIO

$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2$ × $q(x) = 3x^2 - 5x$

①

$$\begin{array}{rl} p(x) \rightarrow & 2x^3 + 4x^2 - x + 2 \\ q(x) \rightarrow & 3x^2 - 5x \\ \hline & -10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x \end{array}$$

②

$$\begin{array}{rl} p(x) \rightarrow & 2x^3 + 4x^2 - x + 2 \\ q(x) \rightarrow & 3x^2 - 5x \\ \hline & -10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x \\ & 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 \end{array}$$

③

$$\begin{array}{rl} p(x) \rightarrow & 2x^3 + 4x^2 - x + 2 \\ q(x) \rightarrow & 3x^2 - 5x \\ \hline & -10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x \\ & 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 \\ \hline p(x) \cdot q(x) \rightarrow & 6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x \end{array}$$

Sean los polinomios $p(x)$ y $q(x)$:

$$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2$$
$$q(x) = 3x^2 - 5x$$

Observa cómo se multiplican los polinomios $p(x)$ y $q(x)$:

① Se multiplica el polinomio $p(x)$ por el monomio $-5x$.

② Se multiplica el polinomio $p(x)$ por el monomio $3x^2$.

③ Se suman los polinomios resultantes.

Observa que el grado del producto (5) es igual a la suma de los grados de los factores $3 + 2$:

$$\underbrace{\text{grado de } p(x) \cdot q(x)}_{5} = \underbrace{\text{grado de } p(x)}_{3} + \underbrace{\text{grado de } q(x)}_{2}$$

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por el otro polinomio y se suman los polinomios resultantes.

El grado del producto de dos polinomios es igual a la suma de los grados de los factores.

1. Completa en tu cuaderno:

a) Grado de $p(x) = 4$.
Grado de $q(x) = 2$.
Grado de $p(x) \cdot q(x) = \ldots$

b) Grado de $p(x) = 5$.
Grado de $q(x) = 3$.
Grado de $p(x) \cdot q(x) = \ldots$

c) Grado de $p(x) = 6$.
Grado de $q(x) = 2$.
Grado de $p(x) \cdot q(x) = \ldots$

d) Grado de $p(x) = 8$.
Grado de $q(x) = 3$.
Grado de $p(x) \cdot q(x) = \ldots$

2. Efectúa los siguientes productos e indica el grado de los factores y del producto:

a) $3x^2 - 5x + 6$ por $\frac{1}{3}x + 2$

b) $2x^3 - 5x + 4$ por $2x^2 - 1$

c) $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3$ por $2x^2 - 5x + 6$

3. Propiedades del producto de polinomios. I

Propiedades conmutativa y asociativa de productos de polinomios.

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$$

Considera los polinomios $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$:

$$p(x) = x^3 - x^2 + 1$$
$$q(x) = 2x + 2$$
$$r(x) = x - 1$$

- Comprueba con los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ que se verifica la propiedad conmutativa del producto, es decir, que el orden de los factores no altera el producto:

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x) = 2x^4 - 2x^2 + 2x + 2$$

- Comprueba también que se verifica la propiedad asociativa del producto, es decir, que el resultado del producto de estos polinomios $p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$ no depende de la forma en que se asocian los factores:

$$[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2$$
$$p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)] = 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2$$

Elemento neutro del producto de polinomios.

ELEMENTO NEUTRO

$$u(x) = 1 + 0x + 0x^2 \ldots$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 2 \\ \cdot\ 0x^2 + 0x + 1 \\ \hline 3x^2 - 5x + 2 \end{array}$$

Para la multiplicación de polinomios existe elemento neutro, que es el polinomio en el que cada uno de sus términos es cero, menos el término independiente o término de grado cero, que es 1:

$$u(x) = 1 + 0x + 0x^2 \ldots$$

Observa que al multiplicar un polinomio cualquiera por $u(x)$ se obtiene el mismo polinomio.

1. Sean los polinomios:

$a(x) = x^2 - x + 1$ $\quad$ $b(x) = x^2 - 2x$ $\quad$ $c(x) = x + 3$

a) Comprueba la propiedad conmutativa:
$a(x) \cdot b(x) = b(x) \cdot a(x)$

b) Comprueba la propiedad asociativa con los polinomios $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$:
$[a(x) \cdot b(x)] \cdot c(x) = a(x) \cdot [b(x) \cdot c(x)]$

2. Multiplica el polinomio $x^3 - 2x^2 + 5x + 6$ por el polinomio $0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.

¿Qué polinomios obtienes?

3. Dados los polinomios

$p(x) = x^3 - 1$ $\quad$ $q(x) = x^2 - x + 1$ $\quad$ $r(x) = x^2 - 1$

comprueba con ellos las propiedades conmutativa y asociativa.

4. Propiedades del producto de polinomios. II

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

$$a(x) \cdot [b(x) + c(x)] = a(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot c(x)$$

Cálculo del primer miembro

①
$$\begin{array}{r} b(x) = x^2 - 2 \\ c(x) = 3x^2 - x + 2 \\ \hline b(x) + c(x) = 4x^2 - x \end{array}$$

②
$$\begin{array}{r} a(x) \longrightarrow \quad 2x^3 + x^2 - 1 \\ b(x) + c(x) \longrightarrow \quad 4x^2 - x \\ \hline -2x^4 - x^3 + x \\ 8x^5 + 4x^4 - 4x^2 \\ \hline 8x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 + x \end{array}$$

Cálculo del segundo miembro

③
$$\begin{array}{r} a(x) \longrightarrow \quad 2x^3 + x^2 - 1 \\ b(x) \longrightarrow \quad x^2 - 2 \\ \hline 2x^5 + x^4 - x^2 \\ -4x^3 - 2x^2 + 2 \\ \hline a(x) \cdot b(x) = 2x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2 \end{array}$$

④
$$\begin{array}{r} a(x) \longrightarrow \quad 2x^3 + x^2 - 1 \\ c(x) \longrightarrow \quad 3x^2 - x + 2 \\ \hline 6x^5 + 3x^4 - 3x^2 \\ -2x^4 - x^3 + x \\ 4x^3 + 2x^2 - 2 \\ \hline a(x) \cdot c(x) = 6x^5 + x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 2 \end{array}$$

⑤
$$\begin{array}{r} 2x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2 \\ + \; 6x^5 + x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 2 \\ \hline 8x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 + x \end{array}$$

Considera los polinomios $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$:

$$a(x) = 2x^3 + x^2 - 1$$
$$b(x) = x^2 - 2$$
$$c(x) = 3x^2 - x + 2$$

Vamos a comprobar con estos polinomios la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$a(x) \cdot [b(x) + c(x)] = a(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot c(x)$$

Para ello vamos a calcular los dos miembros de esta igualdad y comprobar que son iguales.

- Para calcular el primer miembro:
  - ① Se calcula $b(x) + c(x)$.
  - ② Se calcula $a(x) \cdot [b(x) + c(x)]$.
- Para calcular el segundo miembro:
  - ③ Se calcula $a(x) \cdot b(x)$.
  - ④ Se calcula $a(x) \cdot c(x)$.
  - ⑤ Finalmente se suman los resultados obtenidos en ③ y en ④ y se obtiene el mismo resultado obtenido en ②:

$$8x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 + x$$

Con lo cual queda comprobada la propiedad distributiva.

1. Dados los polinomios:

$$p(x) = 3x^2 + 6x - 5 \qquad q(x) = x^3 - x + 2 \qquad r(x) = x^2 - 6x - 1$$

calcula:

a) $[p(x) + q(x)] \cdot r(x)$

b) $p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x)$

c) $p^2(x) + q^2(x)$, sabiendo que $p^2(x) = p(x) \cdot p(x)$

d) ¿Cómo son los resultados de a) y de b)?

5. Igualdades notables. I

1. Cuadrado de una suma.

$$\begin{array}{r} x + a \\ \cdot\ x + a \\ \hline x^2 + xa \\ + \ xa + a^2 \\ \hline x^2 + 2xa + a^2 \end{array}$$

Cuadrado de una suma $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

Observa cómo mediante una multiplicación se obtiene la fórmula

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término más el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

2. Cuadrado de una diferencia.

$$\begin{array}{r} x - a \\ \cdot\ x - a \\ \hline x^2 - xa \\ - \ xa + a^2 \\ \hline x^2 - 2xa + a^2 \end{array}$$

Cuadrado de una diferencia $(x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$

Observa cómo mediante una multiplicación se obtiene la fórmula

$$(x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

3. Suma por diferencia.

$$\begin{array}{r} x + a \\ \cdot\ x - a \\ \hline x^2 + xa \\ - \ xa - a^2 \\ \hline x^2 - a^2 \end{array}$$

Suma por diferencia $(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2$

Observa cómo mediante una multiplicación se obtiene la fórmula

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2$$

Una suma de dos términos multiplicada por la diferencia de los mismos términos es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

4. Cubo de una suma.

$$(x + a)^3 = (x + a)^2 \cdot (x + a)$$

$$(x + a)^2 \longrightarrow x^2 + 2xa + a^2$$

$$\begin{array}{r} \cdot\ x + a \\ \hline x^3 + 2x^2a + xa^2 \\ + \ x^2a + 2xa^2 + a^3 \\ \hline x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 \end{array}$$

Cubo de una suma $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Observa cómo mediante una multiplicación se obtiene la fórmula

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

El cubo de una suma es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.

6. Igualdades notables. II

5. Cubo de una diferencia.

$$(x - a)^3 = (x - a)^2 \cdot (x - a)$$

$$(x - a)^2 \longrightarrow x^2 - 2xa + a^2$$

$$\begin{array}{r} \cdot\ x - a \\ \hline x^3 - 2x^2a + xa^2 \\ -\ x^2a + 2xa^2 - a^3 \\ \hline x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 \end{array}$$

Cubo de una diferencia $\quad (x-a)^3 = x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$

Observa cómo mediante una multiplicación se obtiene la fórmula

$$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$$

El cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término menos el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo.

6. Cuadrado de un polinomio.

$$(a + b - c)^2 = (a + b - c) \cdot (a + b - c)$$

$$\begin{array}{r} a + b - c \\ \cdot\ a + b - c \\ \hline a^2 + ab - ac \\ ab + b^2 - bc \\ -\ ac - bc + c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2 \end{array}$$

Cuadrado del polinomio $a + b - c$ $\quad a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

Observa cómo se obtiene el cuadrado del polinomio $a + b - c$ multiplicando este polinomio por sí mismo:

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término más el duplo de los productos que resultan de multiplicar cada término del polinomio por cada uno de los términos que le siguen.

1. Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + y - t)^2$ c) $(x - 2y + t)^2$ e) $(x - y - 1)^2$

b) $(3x - 2y + z)^2$ d) $(x - 2y - t)^2$ f) $(x - 2y - 2)^2$

2. Calcula:

a) $(3a - b) \cdot (3a + b)$ c) $(2x + 3y)^2$ e) $(a^2 - a) \cdot (a^2 + a)$

b) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y^2\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y^2\right)$ d) $(3x - 2y)^2$ f) $\left(x^2 - \frac{x}{3}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{x}{3}\right)$

3. Calcula los siguientes productos de polinomios utilizando la forma abreviada:

a) $(x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 + 2x - 3)$ c) $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x^2 - 4x + 3)$

b) $(x^3 - 3x + 4) \cdot (x^2 - 5x + 6)$ d) $(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 6x + 2)$

4. Calcula:

a) $(x. - 2a)^2$ b) $(x + 2a)^2$ c) $(2x - 1)^2$ d) $(2x + 1)^2$

7. El producto de polinomios en forma abreviada

PRIMER CASO

Cuando los dos polinomios son polinomios completos.

PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS COMPLETOS

①

q(x) \ p(x)	2	4	−1	2
3				
−5				
5				

②

q(x) \ p(x)	2	4	−1	2
3	6	12	−3	6
−5	−10	−20	5	−10
5	10	20	−5	10

③

q(x) \ p(x)	2	4	−1	2
3	6	12	−3	6
−5	−10	−20	5	−10
5	10	20	−5	10

$6x^5 + 2x^4 - 13x^3 + 31x^2 - 15x + 10$

Una forma abreviada de calcular el producto de dos polinomios consiste en utilizar sólo los coeficientes.

Vamos a calcular de este modo el producto de los polinomios completos **p(x)** y **q(x)**:

$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2 \longrightarrow (2, 4, -1, 2)$

$q(x) = 3x^2 - 5x + 5 \longrightarrow (3, -5, 5)$

Para ello se procede así:

① Se colocan los coeficientes de los polinomios **p(x)** y **q(x)** según indica el cuadro.

② Se completan las casillas del cuadro multiplicando cada coeficiente de **q(x)** por todos los coeficientes de **p(x)**.

③ Se suman en diagonal y en el sentido que indica la flecha los números que hay en el interior de la tabla.

SEGUNDO CASO

Cuando alguno de los polinomios es incompleto.

PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS INCOMPLETOS

①

b(x) \ a(x)	2	0	−5	4
1				
−3				
6				

②

b(x) \ a(x)	2	0	−5	4
1	2	0	−5	4
−3	−6	0	15	−12
6	12	0	−30	24

$2x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 19x^2 - 42x + 24$

Vamos a calcular en forma abreviada el producto de los polinomios **a(x)** y **b(x)**, uno de los cuales, **a(x)**, es un polinomio incompleto.

$a(x) = 2x^3 - 5x + 4 \longrightarrow$ polinomio incompleto

$b(x) = x^2 - 3x + 6 \longrightarrow$ polinomio completo

En este caso se procede como en el caso anterior, cuidando de escribir un cero en la casilla correspondiente a los términos que faltan, si el polinomio es incompleto En el ejemplo, se escribe un cero en la casilla corres pondiente al término de grado 2:

$a(x) \longrightarrow (2, 0, -5, 4)$

$b(x) \longrightarrow (1, -3, 6)$

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

Calcula:

① $(x + a)^2$	④ $(x - a)^2$	⑦ $(x + y)^2$	⑩ $(x + p)^2$
② $(x + 1)^2$	⑤ $(x - 1)^2$	⑧ $(x - y)^2$	⑪ $(x - p)^2$
③ $(x + 2)^2$	⑥ $(x - 2)^2$	⑨ $(x + m)^2$	⑫ $(x + h)^2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Si $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$

$r(x) = \frac{1}{2}x^2$

y $q(x) = x^3 - 2x + 1$

$s(x) = x^2 - 3$

calcula:

a) $p(x) \cdot r(x)$

b) $q(x) \cdot r(x)$

c) $p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$

d) $s(x) \cdot r(x)$

e) $r(x) \cdot r(x)$

f) $[p(x)]^2 \cdot r(x)$

g) $[p(x)]^2$

h) $[q(x)]^2$

i) $[q(x)]^2 \cdot s(x)$

2. Calcula los siguientes productos. Halla previamente el grado de los factores y el grado del producto en cada caso:

a) $(x^3 - 3x^2 + x - 1) \cdot (x + 3)$

b) $(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

c) $(x^3 - x + 1) \cdot (x^2 - 5x + 6)$

d) $(t^3 + t^2 + 1) \cdot (t - 1)$

e) $(t^2 - 2t + 1) \cdot (t - 1)$

f) $(t^5 - 2t + 1) \cdot (t^2 + 2)$

3. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1) \cdot (2x - 3)$

b) $(5x + 2) \cdot (4x - 1)$

c) $(3x + 2) \cdot (4x + 3)$

d) $(2x - 7) \cdot (3x + 4)$

e) $(5x^2 - 1) \cdot (6x + 4)$

f) $(6x + 3) \cdot (7x + 5)$

4. Calcula:

a) $(2x + 1)^2$

b) $(2x - 1)^2$

c) $(2x + 3)^2$

d) $(5x^2 + 3x)^2$

e) $(5x^2 - 3x)^2$

f) $(2x^2 + 2)^2$

g) $(x + 3) \cdot (x - 3)$

h) $(x^2 + 5) \cdot (x^2 - 5)$

i) $\left(2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right)$

j) $(6x - 3)^2$

k) $(6x^2 - 3)^2$

l) $(6x - 3) \cdot (6x + 3)$

5. Calcula:

a) $(x + y + z)^2$

b) $(x + y + 1)^2$

c) $(x - y - 1)^2$

d) $(x - y + z + 1)^2$

e) $(x - 2y + z - 1)^2$

f) $(x + 3y + z + 3)^2$

g) $(x + a)^3$

h) $(2x + 1)^3$

i) $(3x + 2)^3$

j) $(x - 1)^3$

k) $(x - 2)^3$

l) $(2x - 4)^3$

TEMA 20 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. REGLA DE RUFFINI

1. División de polinomios. I

División exacta y división entera de polinomios.

DIVISIÓN EXACTA DE POLINOMIOS

División exacta

$$\begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ \hline 0 & c(x) \end{array}$$

$$D(x) = d(x) \cdot (c(x)$$

D(x) es múltiplo de d(x)

DIVISIÓN ENTERA DE POLINOMIOS

División entera

$$\begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & c(x) \end{array}$$

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

Grado R(x) < grado de d(x)

Consideremos estos dos polinomios, uno como dividendo, **D(x)**, y otro como divisor, **d(x)**.

D(x) → dividendo

d(x) → divisor

Dividir el polinomio **D(x)** entre el polinomio **d(x)** es hallar otro polinomio cociente **c(x)** tal que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

$$\underbrace{D(x)}_{\text{dividendo}} = \underbrace{d(x)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{c(x)}_{\text{cociente}}$$

En este caso se dice que la división es exacta:

$$\begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ \hline 0 & c(x) \end{array}$$

y se dice que el polinomio **D(x)** es múltiplo de los polinomios **d(x)** y **c(x)**. También se dice que **d(x)** y **c(x)** son divisores del polinomio **D(x)**.

Si **D(x)** no es múltiplo de **d(x)**, la división $D(x) \mid d(x)$ se llama **entera** o **inexacta.**

En este caso se pueden encontrar dos polinomios **c(x)** y **R(x)** tales que $D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$. El grado del polinomio resto **R(x)** es siempre menor que el grado del polinomio divisor **d(x)**.

División de un polinomio por un monomio.

POLINOMIO : MONOMIO

$D(x) = 8x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4$: $d(x) = 2x^2$

$$\begin{array}{r} 8x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4 \\ -8x^4 \\ \hline -6x^3 \\ +6x^3 \\ \hline 2x^2 \\ -2x^2 \\ \hline +4 \end{array} \quad \Big| \begin{array}{l} 2x^2 \\ \hline 4x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Consideremos en primer lugar el caso en que el divisor **d(x)** sea el monomio $2x^2$ y sea $D(x) = 8x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4$.

Para hallar el cociente y el resto se divide cada monomio del polinomio **D(x)** por el monomio $2x^2$:

$8x^4 : 2x^2 = 4x^2$ | $-6x^3 : 2x^2 = -3x$ | $2x^2 : 2x^2 = 1$

No se puede dividir $4 : 2x^2$, pues para poder dividir dos monomios, el grado del dividendo debe ser mayor o igual que el grado del divisor.

Observa cómo se disponen en la práctica los datos.

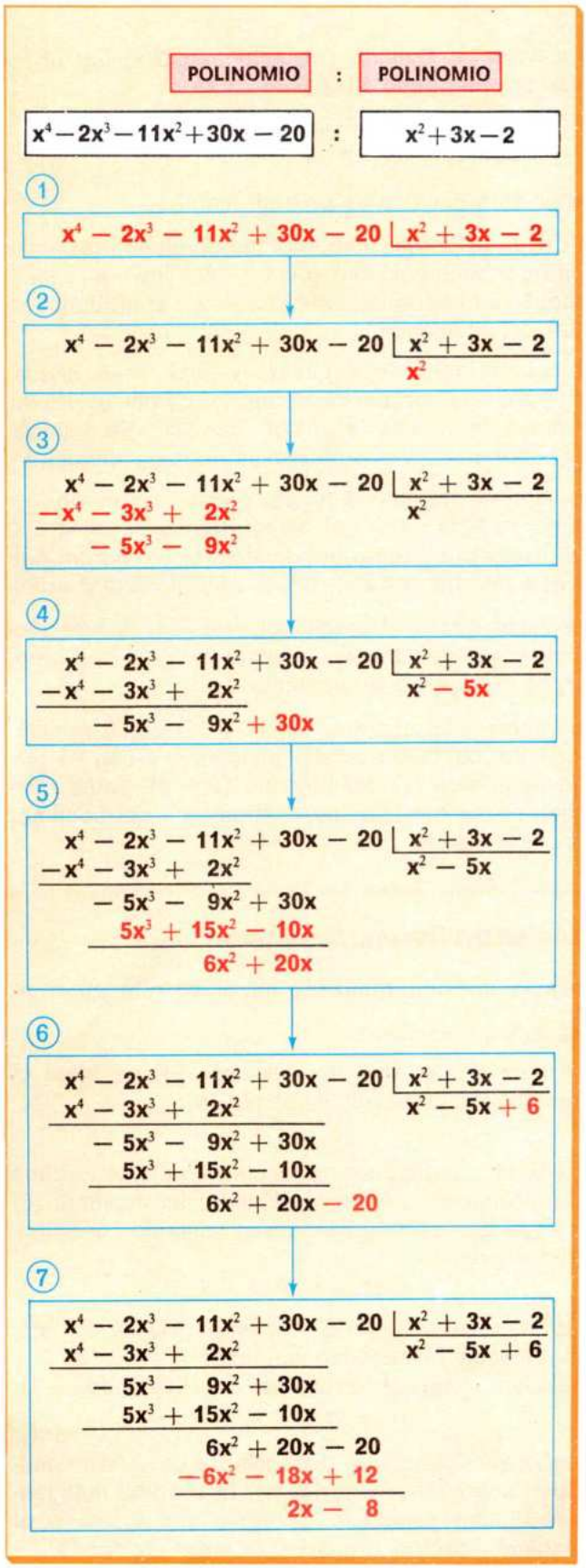
El cociente obtenido es $4x^2 - 3x + 1$, y el resto es 4.

Comprueba que se verifica la propiedad fundamental de la división:

Dividendo = divisor × cociente + resto

$$8x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4 = 2x^2 \cdot (4x^2 - 3x + 1) + 4$$

2. División de polinomios. II



División de un polinomio por otro polinomio.

Consideremos estos dos polinomios:

$D(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20$ (dividendo).

$d(x) = x^2 + 3x - 2$ (divisor).

Para realizar la división de $D(x)$ entre $d(x)$ se procede del modo siguiente:

① Se colocan los polinomios igual que en la división de números y ordenados en forma decreciente.

② A continuación se divide el primer monomio del dividendo (x^4) por el primer monomio del divisor (x^2):

$x^4 : x^2 = x^2$, y se coloca x^2 en el cociente.

③ Se multiplica x^2 por el divisor ($x^2 + 3x - 2$) y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot x^2 = x^4 + 3x^2 - 2x^2$$

Como hay que restar $x^4 + 3x^3 - 2x^2$ del dividendo le sumamos el opuesto:

$$-(x^4 + 3x^3 - 2x^2) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2$$

④ Se baja el término siguiente, $30x$, y se divide, como en ②, el primer monomio del dividendo ($-5x^3$) por el primer monomio del divisor (x^2):

$-5x^3 : x^2 = -5x$, y se coloca $-5x$ en el cociente.

⑤ Se multiplica $-5x$ por el divisor ($x^2 + 3x - 2$) y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot (-5x) = -5x^3 - 15x^2 + 10x$$

Como hay que restar $-5x^3 - 15x^2 + 10x$ del dividendo le sumamos el opuesto:

$$-(-5x^3 - 15x^2 + 10x) = 5x^3 + 15x^2 - 10x$$

⑥ Se baja el último término, -20, y se divide, como en ② y en ④, el primer monomio del dividendo ($6x^2$) por el primer monomio del divisor (x^2):

$6x^2 : x^2 = 6$, y se coloca 6 en el cociente.

⑦ Se multiplica 6 por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot 6 = 6x^2 + 18x - 12$$

Como hay que restar este polinomio del dividendo, le sumamos el opuesto:

$$-(6x^2 + 18x - 12) = -6x^2 - 18x + 12$$

Como $2x$ no se puede dividir por x^2, la división se ha terminado.

Comprueba que:

Grado $c(x)$ = grado $D(x)$ − grado $d(x)$, y que $D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$.

3. División de un polinomio por el binomio x − a. I

POLINOMIO : BINOMIO

Polinomio $D(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x + 4$

Binomio $d(x) = x - 2$

①

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 5x^2 - 3x + 4 & x - 2 \\ -6x^3 + 12x^2 & 6x^2 \\ \hline 17x^2 & \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 5x^2 - 3x + 4 & x - 2 \\ -6x^3 + 12x^2 & 6x^2 + 17x \\ \hline 17x^2 - 3x & \\ -17x^2 + 34x & \\ \hline 31x & \end{array}$$

③

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 5x^2 - 3x + 4 & x - 2 \\ -6x^3 + 12x^2 & 6x^2 + 17x + 31 \\ \hline 17x^2 - 3x & \\ -17x^2 + 34x & \\ \hline 31x + 4 & \\ -31x + 62 & \\ \hline 66 & \end{array}$$

División de un polinomio por el binomio x − 2.

Vamos a hacer la división del polinomio **D(x)** por el binomio de primer grado **d(x)**:

$$D(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x + 4$$
$$d(x) = x - 2$$

Para hacer esta división se procede así:

① Se divide el primer monomio del dividendo ($6x^3$) por el primer monomio del divisor (**x**): $[6x^3 : x = 6x^2]$. Después se multiplica $6x^2$ por $x - 2$ y el producto se resta del dividendo.

② Se baja el término siguiente ($-3x$) y se divide, como en ①, el primer monomio ($17x^2$) por el primer monomio del divisor (**x**): $[17x^2 : x = 17x]$. Se multiplica $17x$ por $x - 2$ y el producto se resta del dividendo.

③ Se baja el término 4 y se divide, como en ①, $31x$ por **x**: $[31x : x = 31]$. Se multiplica 31 por $x - 2$ y el producto se resta del dividendo. Así se obtiene el cociente $c(x) = 6x^2 + 17x + 31$ y el resto $R = 66$.

Por otra parte, como el grado del resto ha de ser menor que el grado del divisor, el resto es de grado cero, es decir, el resto es una constante.

Los coeficientes del cociente (6, 17 y 31) están relacionados con los coeficientes del dividendo y con el término independiente (2) del binomio $(x - 2)$. Estas relaciones permitirán calcular los coeficientes del cociente sin hacer la división.

RELACIONES ENTRE LOS COEFICIENTES

	Coeficientes del cociente y resto		Coeficientes del dividendo
ⓐ	6	=	6
ⓑ	17	=	$6 \times 2 + 5$
ⓒ	31	=	$17 \times 2 + (-3)$
Resto	66	=	$31 \times 2 + 4$

Relación entre los coeficientes.

Considera la división realizada en el párrafo anterior.

Fíjate en estas relaciones:

ⓐ El primer coeficiente del cociente (6) es igual al primer coeficiente del dividendo (6):

$$6 = 6$$

ⓑ El segundo coeficiente del cociente (17) se obtiene multiplicando el primer coeficiente del cociente (6) por 2 (de $x - 2$) y sumándole el segundo coeficiente del dividendo:

$$17 = 6 \times 2 + 5$$

ⓒ El tercer coeficiente del cociente (31) se obtiene multiplicando el segundo coeficiente (17) por 2 y sumándole el tercer coeficiente del dividendo (−3):

$$31 = 17 \times 2 + (-3)$$

En general, cada coeficiente del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente anterior por el término independiente del divisor cambiado de signo y sumándole el correspondiente coeficiente del polinomio dividendo.

Actividades

1. Acaba las siguientes divisiones en tu cuaderno:

a) $x^3 - 6x^2 - 5x + 2 \mid x - 1$

$-x^3 + x^2 \qquad x^2 - 5x \ldots$

$-5x^2 - 5x$

$+5x^2 - 5x$

$-10x + 2$

b) $x^5 - 4x^3 + x + 1 \mid x^2 - 1$

$-x^5 + x^3 \qquad x^3 \ldots$

$-3x^3 + x$

c) $x^6 \quad -1 \mid x^2 - 1$

$-x^6 + x^4 \qquad x^4 + x^2 \ldots$

$x^4 - 1$

$-x^4 + x^2$

$x^2 - 1$

2. Conociendo el dividendo, el cociente y el resto, hallar el divisor.

EJEMPLO RESUELTO

Al dividir el polinomio

$$p(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

por un binomio se obtuvo de cociente $c(x) = 3x + 2$ y de resto $R(x) = 5x + 5$. Halla el binomio divisor.

De la relación:

dividendo = divisor × cociente + resto:

$$p(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

se tiene:

$$3x^3 + 2x^2 - x + 1 = d(x) \cdot (3x + 2) + 5x + 5$$

de donde:

$$d(x) = \frac{(3x^3 + 2x^2 - x + 1) - (5x + 5)}{3x + 2}$$

$3x^3 + 2x^2 - 6x - 4 \mid 3x + 2$

$-3x^3 - 2x^2 \qquad x^2 - 2$

$-6x - 4$

$+6x + 4$

0

divisor $= x^2 - 2$

Al dividir el polinomio

$$q(x) = 6x^3 + 4x^2 + 6x - 2$$

por un binomio se obtuvo de cociente $c(x) = 6x + 10$ y de resto $R(x) = 10x - 12$. Halla el binomio divisor.

3. Haz las siguientes divisiones. Halla el cociente y el resto:

a) $x^2 + 2x + 1 \mid x$

b) $x^3 + 3x^2 + 6x + 2 \mid x^2$

c) $8x^6 + 4x^5 - 4x^4 \mid 2x^2$

d) $x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 13x^2 + 13x + 2 \mid x^3 + 3x - 2$

e) $3x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 5 \mid x^2 - 3x + 1$

4. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

Indica antes de hacerlas cuál es el grado del cociente en cada caso y comprueba en cada caso que $D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$.

a) $x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x \mid x^2 - x + 3$

b) $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 \mid x + 1$

c) $x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 6x - 8 \mid x - 3$

d) $x^3 - x^2 + x - 1 \mid x^2 - 1$

5. Al dividir el polinomio

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$$

por un binomio se obtuvo de cociente $c(x) = x^2 + x - 1$ y de resto $R(x) = 3$.

Halla el binomio divisor $d(x)$.

Aplica, como en el ejemplo resuelto,

$2x^3 + 3x^2 - x + 2 = d(x) \cdot [x^2 + x - 1] + 3$

6. Completa en tu cuaderno la siguiente división:

$x^4 \quad -1 \mid x - 1$

$-x^4 + x^3 \qquad x^3 + x^2 + \ldots$

x^3

$-x^3 + x^2$

x^2

7. Halla el resto y el cociente de las siguientes divisiones:

a) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1 \mid x - 8$

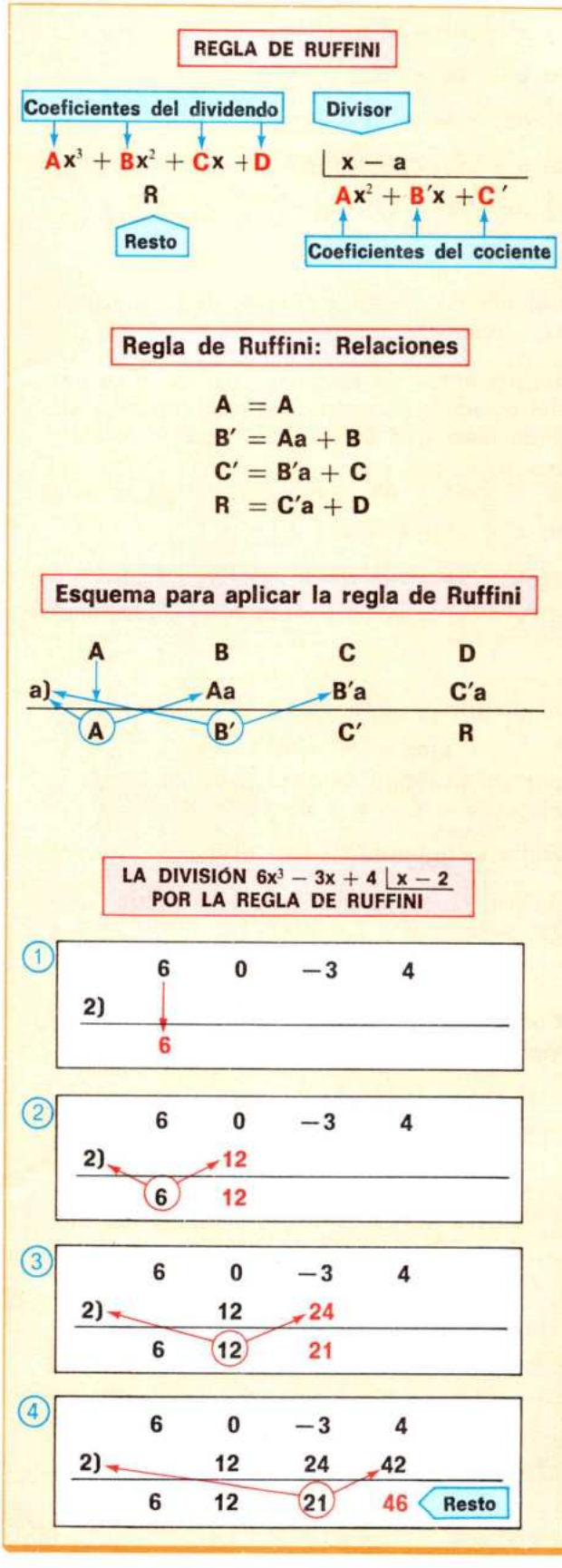
b) $2x^4 + 3x^2 + 6x - 7 \mid x - 1$

c) $x^3 + 5x^2 + x - 1 \mid x - 2$

d) $x^3 + x^2 - x - 2 \mid x - 1$

4. División de un polinomio por el binomio x − a. II

Regla de Ruffini.



Considera esta división:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \mid x - a$$

Llamemos **c(x)** al cociente $c(x) = Ax^2 + B'x + C'$ y llamemos **R** al resto.

Se puede probar que entre los coeficientes del cociente y del dividendo se verifican las siguientes relaciones, análogas a las encontradas en la página 154.

- El primer coeficiente del cociente **A** es igual al primer coeficiente del dividendo (**A**).
- El segundo coeficiente del cociente **B'** se obtiene mediante la relación $B' = Aa + B$.
- El tercer coeficiente del cociente **C'** se obtiene mediante la relación $C' = B'a + C$.
- El resto (**R**) se obtiene mediante la relación

$$R = C'a + D$$

Estas relaciones constituyen la **regla de Ruffini.**

Veamos en la práctica cómo se hace una división:

$$6x^3 - 3x + 4 \mid x - 2$$

(1) Se ordena en forma decreciente el dividendo y se colocan ordenados sus coeficientes. Si en el polinomio dividendo faltan términos, como en este caso que es incompleto, se ponen ceros en los lugares de los términos que faltan. Debajo, y desplazado a la izquierda, se coloca el término independiente del divisor cambiado de signo ($a = 2$). El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo; por eso el número 6 se baja y se escribe debajo de la línea roja.

(2) El segundo coeficiente del cociente se obtiene según indican las flechas del esquema:

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

(3) El tercer coeficiente del cociente (21) se obtiene como se indica en el esquema:

$$21 = 12 \cdot 2 + (-3)$$

(4) El resto se obtiene como se indica en el esquema:

$$46 = 21 \cdot 2 + 4$$

Como el grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo, resulta que el cociente es el polinomio:

$c(x) = 6x^2 + 12x + 21$ y el resto es $R = 46$

5. Descomposición factorial.

Descomposición factorial sacando factor común.

FACTORIZAR SACANDO FACTOR COMÚN

- $p(x) : 25x^4 - 30x^3 + 5x^2 = 5x^2 \cdot (5x^2 - 6x + 1)$
- $q(x) : 12x^3 - 6x^2 = 6x^2 \cdot (2x - 1)$
- $r(x) : 30x^6 - 18x^3 = 6x^3 \cdot (5x^3 - 3)$

Sacando el factor común se puede conseguir a veces la factorización de un polinomio.

Observa la factorización de los polinomios **p(x)**, **q(x)** y **r(x)**, en los que se han sacado los factores comunes $5x^2$, $6x^2$ y $6x^3$, respectivamente.

Descomposición factorial en forma del cuadrado de una suma o en forma del cuadrado de una diferencia.

FACTORIZAR APLICANDO EL CUADRADO DE UNA SUMA O DE UNA DIFERENCIA

Trinomio dado $p(x) = x^4 + 10x^2 + 25$

- x^4 es el cuadrado de x^2.
- 25 es el cuadrado de 5.
- $10x^2$ es el doble del producto de x^2 por 5.

$$x^4 + 10x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2$$

Recuerda las fórmulas del cuadrado de una suma $(x + a)^2$ y del cuadrado de una diferencia $(x - a)^2$.

Sea el polinomio $p(x) = x^2 + 10x + 25$.

Observa que todos los signos del polinomio son positivos y que se trata del cuadrado de la suma $(x + 5)$:

$$p(x) = x^2 + 10x + 25 = (x + 5) \cdot (x + 5) = (x + 5)^2$$

Así tenemos descompuesto el polinomio en producto de dos binomios.

Descomposición factorial en forma de suma por diferencia.

FACTORIZAR APLICANDO SUMA POR DIFERENCIA

- $x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$
- $25x^4 - 64 = (5x^2 + 8) \cdot (5x^2 - 8)$

FACTORIZAR POLINOMIOS POR MÉTODOS COMBINADOS

$b(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2 =$

$= x \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)$

Recuerda que el producto de una suma por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados:

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2$$

Esta fórmula permite factorizar la diferencia de dos cuadrados.

Sea el polinomio $a(x) = 25x^4 - 64$:

- $25x^4$ es el cuadrado de $5x^2$.
- 64 es el cuadrado de 8.

Luego: $a(x) = 25x^4 - 64 = (5x^2 + 8) \cdot (5x^2 - 8)$.

En ocasiones se consigue descomponer en polinomios combinados dos de los métodos anteriores.

Así se factoriza el polinomio $b(x) = x^3 + 2x^2 + x$ sacando factor común **x** y aplicando el cuadrado de una suma.

CALCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

1. Calcula el valor del polinomio $x^2 - 1$ para los siguientes valores de x:

① $x = 1$	③ $x = 3$	⑤ $x = -1$	⑦ $x = -3$
② $x = 2$	④ $x = 4$	⑥ $x = -2$	⑧ $x = -4$

2. Calcula el valor de $(x - 3)^2$ para:

① $x = 1$	③ $x = 3$	⑤ $x = -1$	⑦ $x = -3$
② $x = 2$	④ $x = 4$	⑥ $x = -2$	⑧ $x = -4$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $2x^6 + 10x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6 \,|\, 2x^5$

b) $\frac{6}{5}x^6 + \frac{4}{3}x^4 + 2x^2 - \frac{6}{3} \,|\, 6x^4$

c) $3x^4 + 10x^3 - 8x^2 + 6x \,|\, x^2$

d) $\frac{1}{2}x^3 + 6x^2 - 3x + 8 \,|\, \frac{1}{3}x$

2. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(4x^2 - 6x - 4) : (x - 2)$

b) $(8x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 6x - 1) : (x^3 + 3x - 1)$

c) $\left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 6x + 7\right) : x^2 - 5$

d) $x^3 - 6x^2 - 3x + 1 \,|\, x - 1$

3. Indica cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3 + 5x - 1 \,|\, x + 3$

b) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

c) $(x^7 - x^6 - 3x^4 + 16x^3 + 47x + 3x^5 - 30x^2 - 24) : (x - 1)$

d) $x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1 \,|\, x - 1$

4. Halla el cociente y el resto. Indica antes el grado del cociente:

$x^3 - 6x^2 - 5x - 88 \,|\, x - 8$

5. Halla el cociente y el resto de la división $3x^5 + 7x^4 - 3x^2 + 5 \,|\, x - 6$

6. Se sabe que la división $P(x) \,|\, x - 2$ da de cociente $c(x) = x^2 - x + 1$ y de resto $R = 6$.

¿Cuál es el valor de $P(x)$?

7. ¿Es exacta la división $x^5 - 32 \,|\, x - 2$? Indica el grado del resto antes de hacer la división

8. Halla el resto y el cociente de las siguientes divisiones:

a) $x^5 - 32 : x + 2$	f) $x^3 + 8 : x - 2$
b) $x^5 - 32 : x - 2$	g) $x^3 + 8 : x + 2$
c) $x^4 - 16 : x + 2$	h) $x^3 - 27 : x - 3$
d) $x^3 - 8 : x - 2$	i) $x^3 - 27 : x + 3$
e) $x^3 - 8 : x + 2$	j) $x^4 + 1 : x + 1$

9. Descompón en producto de suma por diferencia:

a) $x^2 - 4$	g) $9x^2 - 1$
b) $x^2 - 16$	h) $16x^2 - 1$
c) $x^2 - 25$	i) $x^4 - 25$
d) $4x^2 - 16$	j) $25x^6 - 9$
e) $x^2 - 1$	k) $81x^4 - 16x^2$
f) $100x^2 - 1$	l) $25x^6 - 81x^2$

10. Descompón en producto de factores, en forma de cuadrado de una suma o en forma de cuadrado de una diferencia:

a) $x^2 - 4x + 4$
b) $x^2 - 6x + 9$
c) $x^2 + 6x + 9$
d) $x^2 + 4x + 4$
e) $x^2 - 2x + 1$
f) $x^2 - 10x + 25$
g) $x^2 + 2x + 1$
h) $x^2 + 10x + 25$
i) $x^4 - 6x^2 + 9$
j) $x^4 + 10x^2 + 25$
k) $x^4 - 20x^2 + 100$
l) $x^6 - 14x^3 + 49$

11. Descompón en producto de factores, sacando en primer lugar el factor común:

a) $x^3 - 4x^2 + 4x$
b) $x^3 - 2x^2 + x$
c) $x^5 - 20x^3 + 100x$
d) $3x^5 - 18x^3 + 27x$
e) $2x^3 + 20x^2 + 50x$
f) $x^3 - x$
g) $x^5 - x$
h) $x^3 - 16x$
i) $x^3 - 25x$
j) $x^5 - x^3$

12. Descompón el producto de factores:

a) $25x^4 - \frac{1}{4}$
b) $16x^4 - \frac{9}{4}$
c) $x^2 - 16x + 64$
d) $x^2 - 10x + 25$
e) $x^4 - 9x^2$
f) $x^6 - 16x^4$
g) $36x^4 - \frac{9}{4}$

13. Descompón en producto de factores:

a) $x^2 - 10x + 25$
b) $x^2 - 6x + 9$
c) $2x^2 - 5x$
d) $x^2 - 10x$
e) $x^2 - 8x + 16$
f) $x^2 - 4x$

14. Descompón los siguientes binomios producto de factores:

a) $36x^2 - \frac{9}{4}$
b) $x^4 - x^2$
c) $x^4a^2 - x^6a^2$
d) $\frac{81}{4}x^6 - 25x^4$
e) $36a^2b^2 - 81b^4$
f) $x^2 - 16$
g) $x^4 - 81$
h) $4x^6 - 1$
i) $16x^4 - 9$
j) $x^4 - x^6$

15. Completa los términos que faltan:

a) $x^2 - \square + 16 = (x - 4)^2$
b) $25x^2 + \square + 1 = (5x + \square)^2$
c) $16x^2 - \square + 9 = (\square - \square)^2$

16. Desarrolla:

a) $(2x^2 + 5) \cdot (2x^2 - 5)$
b) $(3x^3 + 6) \cdot (3x^3 - 6)$
c) $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}x\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x\right)$
d) $(x + x^2) \cdot (x - x^2)$
e) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}x^2\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}x^2\right)$
f) $\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)$

17. Descompón en producto de factores:

a) $x^4 - 10x^3 + 25x^2$. Primero saca el factor común x^2.
b) $2x^7 - 50x^3$. Primero saca el factor común $2x$.
c) $\frac{9}{4}x^{11} - 36x^3$. Primero saca el factor común x^3.
d) $5x^3 - 20x$. Primero saca el factor común $5x$.
e) $72x^7 - 50x^5$. Primero saca el factor común $2x$.
f) $243x^5 - 3x$. Primero saca el factor común $3x$.

18. Calcula el valor de los siguientes polinomios para $x = 2$:

a) $x^5 - 1$
b) $x^2 - 1$
c) $x^7 - 1$
d) $x^6 - 2$
e) $x^3 - 5$
f) $x^2 - 6x + 8$
g) $4x^2 - 16$
h) $x^2 - 2x + 14$
i) $x^4 + 1$
j) $x^4 + 10$

TEMA 21 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Concepto de ecuación de segundo grado

La función cuadrática y la ecuación de segundo grado.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$

$f(x) = x^2 - 10x + 16$

Algunas imágenes

- $f(1) = 1^2 - 10 \cdot 1 + 16 = 1 - 10 + 16 = 7$
- $f(2) = 2^2 - 10 \cdot 2 + 16 = 4 - 20 + 16 = 0$
- $f(3) = 3^2 - 10 \cdot 3 + 16 = 9 - 30 + 16 = -5$
- $f(8) = 8^2 - 10 \cdot 8 + 16 = 64 - 80 + 16 = 0$

$f(2) = 0$
$f(8) = 0$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$ax^2 + bx + c = 0$

a → **coeficiente del término principal o cuadrático**

b → **coeficiente del término lineal**

c → **término constante o independiente**

Las funciones polinómicas de segundo grado se llaman también **funciones cuadráticas.**

Así, la función **f**, definida por $f(x) = x^2 - 10x + 16$, es una función polinómica de segundo grado, o una función cuadrática.

Observa cómo dando valores a **x** se calculan las imágenes de algunos números racionales mediante la función **f**.

¿Cuáles son los valores de **x** cuyas imágenes son el cero, es decir, para qué números se verifica que $x^2 - 10x + 16 = 0$?

Observa que 2 y 8 son los valores que verifican la igualdad anterior: $f(2) = 0$ y $f(8) = 0$. Esto significa que 2 y 8 son originales o antiimágenes del 0. También se dice que 2 y 8 son **ceros** del polinomio $x^2 - 10x + 16$.

La igualdad literal $x^2 - 10x + 16 = 0$ se llama **ecuación de segundo grado.**

Esta ecuación sólo se verifica si se sustituye la **x** por 2 o por 8. Por esta razón se dice que 2 y 8 son **soluciones** o **raíces** de la ecuación $x^2 - 10x + 16 = 0$.

En general, para hallar los originales o antiimágenes del cero en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ hay que hallar las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

En esta ecuación de segundo grado:

- el monomio ax^2 es el término cuadrático
- el monomio **bx** es el término lineal
- el monomio **c** es el término constante o independiente

Se llama ecuación de segundo grado con una incognita a toda ecuación que puede escribirse en forma reducida así: $ax^2 + bx + c = 0$, donde x es la incógnita y a, b y c son los coeficientes de la ecuación, siendo siempre el coeficiente a distinto de cero.

1. Sea la función cuadrática f: $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

a) Calcula las imágenes de 1, 2, 3, 4 y 5.

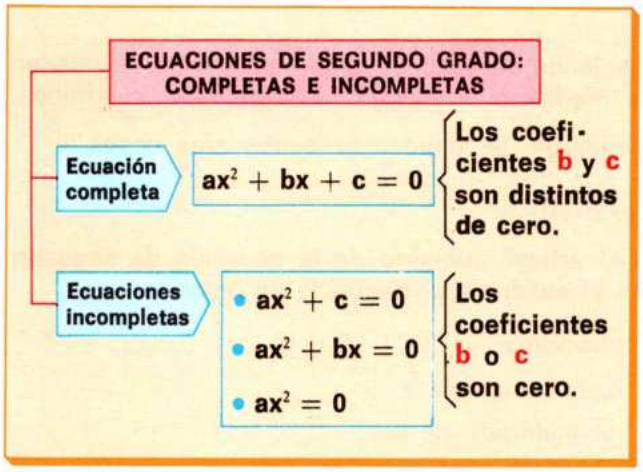
b) Teniendo en cuenta los resultados anteriores, indica cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

c) Indica en la ecuación anterior el término cuadrático.

d) Indica el término lineal.

e) Indica el término constante.

2. Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas



Clasificación de las ecuaciones de segundo grado: completas e incompletas.

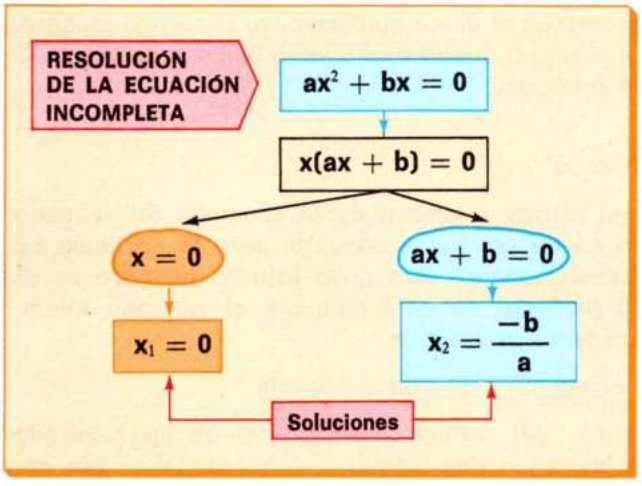
En toda ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ siempre se supone que el coeficiente **a** es distinto de cero ($a \neq 0$) porque si **a** fuera igual a cero ($a = 0$) resultaría $bx + c = 0$, que es una ecuación de primer grado.

Si alguno de los otros coeficientes **b** o **c** o los dos son cero, las ecuaciones de segundo grado que se obtienen se llaman **ecuaciones incompletas.**

Si los tres coeficientes **a**, **b** y **c** son distintos de cero la ecuación que se obtiene se llama **ecuación incompleta.**

Si los dos coeficientes **b** y **c** son ceros, resulta la ecuación $ax^2 = 0$, cuya única solución es $x = 0$.

$$ax^2 = 0 \longrightarrow x^2 = 0 \longrightarrow x = 0$$



Resolución de las ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Sea la ecuación $3x^2 - 5x = 0$. Para resolver esta ecuación sacamos el factor común **x** en el primer miembro:

$$x \cdot (3x - 5) = 0$$

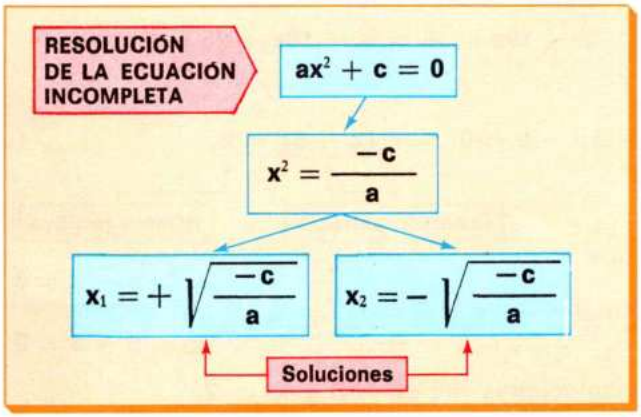
Para que el producto de los dos números **x** y $3x - 5$ sea cero uno de los dos números ha de ser cero.

Esto puede ocurrir si se verifica:

- que $x = 0$
- que $3x - 5 = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{3}$

Luego las dos soluciones x_1 y x_2 de la ecuación $3x^2 - 5x = 0$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{5}{3}$

Observa la resolución de la ecuación $ax^2 + bx = 0$.



Resolución de las ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$.

Vamos a resolver la ecuación $3x^2 - 12 = 0$.

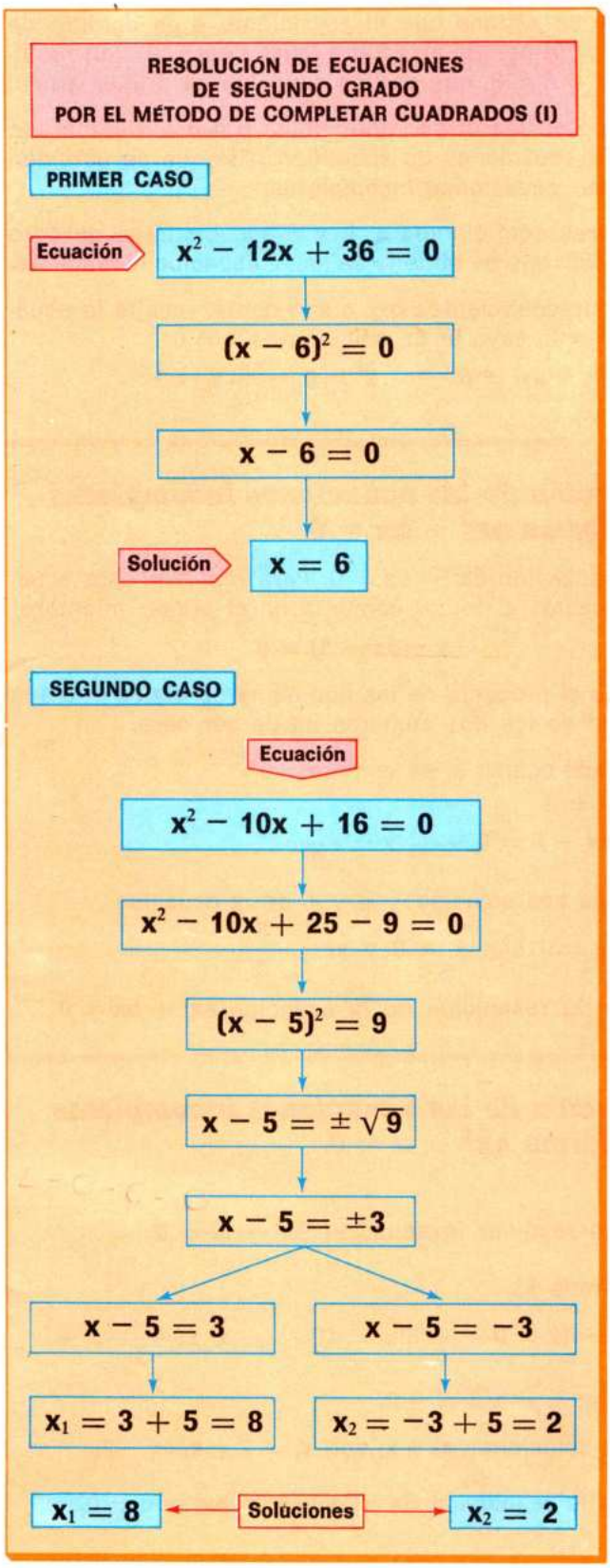
Despejamos x^2:

$$3x^2 - 12 = 0 \longrightarrow 3x^2 = 12 \longrightarrow x^2 = \frac{12}{3} = 4$$

Por tanto: $x = \sqrt{4} = \pm 2$.

Las dos soluciones x_1 y x_2 son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

Observa la resolución de la ecuación $ax^2 + c = 0$.



Resolución por el método de completar cuadrados de ecuaciones de segundo grado completas.

Las ecuaciones de segundo grado completas se pueden resolver mediante el método de completar cuadrados.

Al proceder así se pueden presentar tres casos.

PRIMER CASO

Cuando el primer miembro de la ecuación de segundo grado es el cuadrado perfecto de un binomio.

Sea la ecuación $x^2 - 12x + 36 = 0$.

- x^2 es el cuadrado de x.
- 36 es el cuadrado de 6.
- $12x$ es el doble de 6 por x, luego

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

Por consiguiente, la ecuación $x^2 - 12x + 36 = 0$ se puede escribir así: $(x - 6)^2 = 0$.

Como el cero es el único número cuyo cuadrado es cero, resulta $x - 6 = 0$, luego $x = 6$ es la única solución de la ecuación propuesta.

SEGUNDO CASO

Cuando el primer miembro de la ecuación de segundo grado no es un cuadrado perfecto, pero la ecuación se puede transformar en otra cuyo primer miembro es el cuadrado perfecto de un binomio y el segundo miembro es un número positivo.

Sea la ecuación $x^2 - 10x + 16 = 0$.

El polinomio del primer miembro no es un cuadrado perfecto, pero los dos primeros términos, $x^2 - 10x$, recuerdan el cuadrado de $x - 5$, que es

$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$.

Vamos a escribir la ecuación de forma que figure en ella este cuadrado $(x - 5)^2$:

$$x^2 - 10x + 16 = x^2 - 10x + 25 - 9$$
$$16$$

$$(x - 5)^2 - 9 = 0 \longrightarrow (x - 5)^2 = 9$$

Cuadrado perfecto = Número positivo

$$(x - 5)^2 = 9 \longrightarrow x - 5 = \sqrt{9} = \pm 3 \begin{cases} x_1 = 5 + 3 = 8 \\ x_2 = 5 - 3 = 2 \end{cases}$$

Las dos soluciones son $x_1 = 8$ y $x_2 = 2$.

4. Resolución de ecuaciones de segundo grado completas. II

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR EL MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS (II)

Ecuación

$x^2 - 6x + 13 = 0$

$x^2 - 6x + 9 + 4 = 0$

$(x - 3)^2 + 4 = 0$

$(x - 3)^2 = -4$

Ecuación imposible, no hay ninguna solución real: ni racional ni irracional

TERCER CASO

Cuando el primer miembro de la ecuación de segundo grado no es un cuadrado perfecto, pero la ecuación se puede transformar en otra cuyo primer miembro es el cuadrado perfecto de un binomio y el segundo miembro es un número negativo.

Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ los dos primeros términos, $x^2 - 6x$, recuerdan el cuadrado de $(x - 3)$, que es $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

Vamos a escribir la ecuación de forma que figure en ella el cuadrado $(x - 3)^2$:

$x^2 - 6x + 12 = x^2 - 6x + 9 + 4$,

luego $(x-3)^2 + 4 = 0 \longrightarrow (x - 3)^2 = -4$

$(x - 3)^2$: Cuadrado perfecto; $=$; -4: Número negativo

Esta última igualdad es imposible, porque el cuadrado de todo número real es un número positivo; por lo tanto, la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ es una ecuación que no tiene ninguna solución real, ni racional ni irracional.

1. Resolver una ecuación de segundo grado completando cuadrados.

EJEMPLO RESUELTO

Vamos a resolver la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

1.º Se pasa el término independiente al segundo miembro: $2x^2 - 7x = -3$.

2.º Se dividen los dos miembros entre el coeficiente (2) de x^2:

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{7x}{2} = -\frac{3}{2} \longrightarrow x^2 - \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2} \quad [1]$$

3.º a) Se eleva al cuadrado la mitad del coeficiente de x:

$$\frac{-7}{2} : 2 = \frac{-7}{4} \longrightarrow \left(\frac{-7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

b) Se suma dicho cuadrado $\left(\frac{49}{16}\right)$ a los dos miembros de la ecuación [1]:

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \longrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} \longrightarrow x - \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \frac{5}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resuelve del mismo modo las ecuaciones:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ c) $5x^2 - 11x + 2 = 0$ d) $x^2 - 10x + 24 = 0$

5. Resolución de ecuaciones de segundo grado. Fórmula general

OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Ecuación dada: $ax^2 + bx + c = 0$

1. $ax^2 + bx + c = 0$ $\cdot 4a$

   $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

2. $4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$

3. $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$

4. $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

5. $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

Fórmula: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [A]$$

Fórmula general de la ecuación de segundo grado.

Consideremos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos a resolver esta ecuación por el método de completar cuadrados.

Para conseguir que el primer miembro de la ecuación sea un cuadrado perfecto vamos a someter esta ecuación a las siguientes transformaciones:

1. Se multiplican los dos miembros por $4a$.

   Observa lo que sucede en el primer miembro.

2. La parte subrayada recuerda el cuadrado de $2ax + b$, que es: $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$.

   Para que figure este cuadrado en el primer miembro se le suma y se le resta un único número b^2 $(b^2 - b^2 = 0)$.

3. Se sustituyen los tres primeros términos por $(2ax + b)^2$.

4. Se pasan al segundo miembro los términos $-b^2$ y $4ac$.

   Así se obtiene $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

   Un cuadrado perfecto = Un número

5. Si el segundo miembro de esta ecuación es positivo resulta la fórmula [A].

Esta fórmula general permite resolver directamente cualquier ecuación de segundo grado.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

PRIMER CASO

Cuando el segundo miembro es cero

Si $b^2 - 4ac = 0$

$(2ax + b)^2 = 0$

$2ax + b = 0$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Una sola solución.

SEGUNDO CASO

Cuando el segundo miembro es positivo

Si $b^2 - 4ac > 0$

Existen dos raíces cuadradas de $b^2 - 4ac$.

$2ax = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hay dos soluciones, que son números reales.

TERCER CASO

Cuando el segundo miembro es negativo

Si $b^2 - 4ac < 0$

$(2ax + b)^2$ = número negativo

Ecuación imposible.
No hay ninguna solución real: ni racional ni irracional.

6. Naturaleza de las soluciones de la ecuación de segundo grado

FÓRMULA PARA LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

($b^2 - 4ac$: Discriminante)

PRIMER CASO

Si $b^2 - 4ac = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Hay dos soluciones iguales

SEGUNDO CASO

Si $b^2 - 4ac > 0$

Sea $m = \sqrt{b^2 - 4ac}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + m}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - m}{2a}$$

$x_1 \neq x_2$

Hay dos soluciones distintas

TERCER CASO

Si $b^2 - 4ac < 0$

$\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número racional ni irracional

No hay soluciones reales

Discriminante de una ecuación de segundo grado.

Observa la fórmula para la resolución de la ecuación de segundo grado.

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante de la ecuación** y permite averiguar en cada ecuación el número de soluciones y su naturaleza según que $b^2 - 4ac$ sea nulo, positivo o negativo. Se distinguen tres casos:

PRIMER CASO

Cuando el discriminante es cero las dos soluciones son iguales, es decir, la ecuación tiene una única solución.

Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, y las dos soluciones de la ecuación, x_1 y x_2, son iguales:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

También se dice que la ecuación tiene una raíz doble.

Ejemplo numérico

Sea la ecuación $4x^2 - 12x + 9 = 0$:

$$b^2 - 4ac = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}$$

SEGUNDO CASO

Cuando el discriminante es positivo la ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ tiene dos valores, uno positivo y otro negativo. Por eso, x_1 y x_2 son números racionales e irracionales distintos.

Ejemplo numérico

Sea la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0$:

$$b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La ecuación tiene dos soluciones distintas.

TERCER CASO

Cuando el discriminante es negativo la ecuación no tiene ninguna solución real.

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número racional ni irracional, es decir, en este caso la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo numérico

Como la ecuación

$$x^2 - 6x + 13 = 0,\ b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 13 < 0$$

la ecuación no tiene soluciones reales.

7. Propiedades de las soluciones de la ecuación de segundo grado

Suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado.

SUMA DE LAS SOLUCIONES EN LA ECUACIÓN

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$+ \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Las dos soluciones (x_1 y x_2) de la ecuación $2x^2 - 5x + 2 = 0$ son $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

La suma de las soluciones $x_1 + x_2$ es $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Observa que $\frac{5}{2}$ es igual al coeficiente de x, cambiado de signo y dividido por el coeficiente de x^2:

$$\frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2}$$

Esto mismo ocurre en toda ecuación de segundo grado.

Las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 y x_2 y su suma es:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual al coeficiente de x, cambiado de signo, dividido por el coeficiente de x^2.

Producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado.

PRODUCTO DE LAS SOLUCIONES EN LA ECUACIÓN

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Si se multiplica la solución x_1 por la solución x_2 se obtiene una diferencia de cuadrados, por ser el producto de una suma de dos números por la diferencia de dichos números:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual al término independiente de x dividido por el coeficiente de x^2.

Actividades

CÁLCULO MENTAL, CÁLCULO RÁPIDO

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

① $x^2 - 1 = 0$
② $x^2 - 4 = 0$
③ $x^2 - 9 = 0$
④ $x^2 - 25 = 0$
⑤ $x^2 - 36 = 0$
⑥ $x^2 - 49 = 0$
⑦ $x^2 - 36 = 0$
⑧ $x^2 - 81 = 0$
⑨ $x^2 - 100 = 0$
⑩ $2x^2 - 8 = 0$
⑪ $3x^2 - 12 = 0$
⑫ $5x^2 - 45 = 0$
⑬ $x^2 - 2x = 0$
⑭ $x^2 - 4x = 0$
⑮ $x^2 - 5x = 0$
⑯ $x^2 - 6 = 0$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $9x^2 - 36 = 0$
b) $49x^2 - 147 = 0$
c) $35x^2 + 9x - 2 = 0$
d) $x^2 - 2x - 8 = 0$
e) $4x^2 + 11x - 3 = 0$
f) $4x^2 - 13x + 3 = 0$
g) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
h) $2x^2 - 11x + 5 = 0$
i) $x^2 - 13x + 42 = 0$
j) $6x^2 + 3x = 0$
k) $8x^2 + 9x = 0$
l) $12x^2 - 3x = 0$
m) $4x^2 + 2 = 0$
n) $8x^2 + 6 = 0$
o) $4x^2 + 8 = 0$
p) $4x^2 - 16 = 0$
q) $6x^2 - 36 = 0$
r) $8x^2 - 72 = 0$

2. Sustituye la x por 3 en las ecuaciones:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

¿Es 3 solución de la ecuación **a**? ¿Y de la ecuación **b**?

3. En la función cuadrática $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = x^2 - 7x + 10$, halla $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(5)$.

¿Cuáles son los originales o antiimágenes del 0? ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - 7x + 10 = 0$?

4. Resuelve la ecuación $4x^2 - 6x + 2 = 0$.

Comprueba que $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2$

y que $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$.

5. ¿Cuánto vale la suma de las raíces de la ecuación $x^2 - 3x - 21 = 0$? ¿Y el producto?

6. Resuelve la ecuación $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$.

Comprueba que la suma de las soluciones es $\frac{7}{6}$ y que el producto es $\frac{1}{3}$

7. Resuelve las ecuaciones $ax^2 + bx = 0$ y $8x^2 - 6x = 0$.

¿Cómo son las ecuaciones que tienen siempre una solución igual a cero?

8. Resuelve la ecuación $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x - 13}{6}$

9. Escribe:

a) Cinco ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$ que tengan solución.

b) Cinco ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$ que no tengan solución. Por ejemplo:

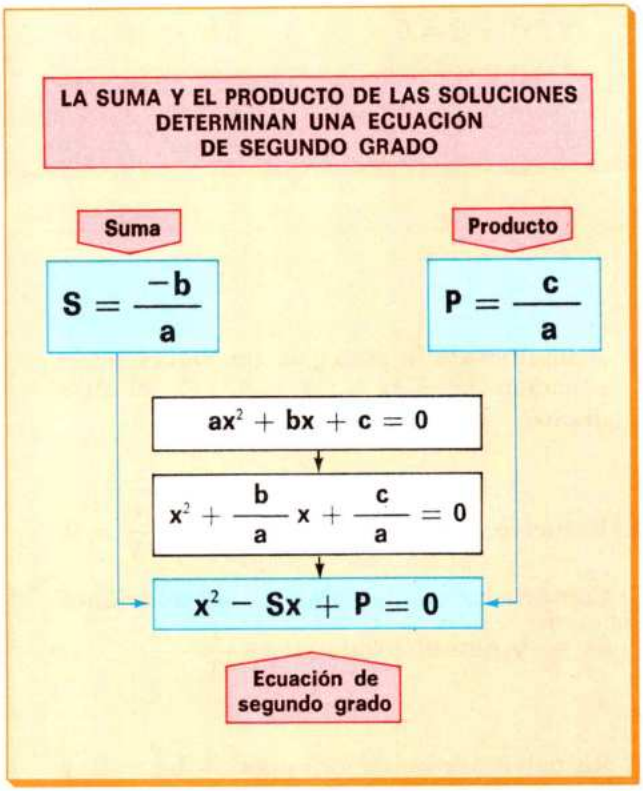
$2x^2 + 8 = 0 \longrightarrow x^2 = -4$ (imposible)

10. Resuelve la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Comprueba que la suma de las soluciones es $\frac{3}{2}$ y que el producto de las soluciones es $\frac{1}{2}$

TEMA 22 ECUACIONES REDUCIBLES A OTRAS DE SEGUNDO GRADO

1. La ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones



Cómo se escribe una ecuación de segundo grado cuando se conocen la suma y el producto de sus soluciones.

Supongamos que de una ecuación de segundo grado conocemos la suma **S** y el producto **P** de sus dos soluciones:

$$S = x_1 + x_2 \qquad P = x_1 \cdot x_2$$

¿Cómo podemos encontrar esta ecuación de segundo grado?

Si dividimos por **a** la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ [1]

Como la suma **S** de las soluciones es $\frac{-b}{a}$ y el producto **P** es $\frac{c}{a}$, podemos operar así:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \longrightarrow \frac{b}{a} = -S$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{c}{a} = P$$

Sustituyendo en [1] resulta la ecuación buscada:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

que es una fórmula que se aplica en la resolución de problemas numéricos.

EJEMPLO 1

Halla una ecuación de segundo grado sabiendo que sus soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -7$.

$$S = 3 + (-7) = -4$$
$$P = 3 \cdot (-7) = -21$$

Aplicando la fórmula

$x^2 - Sx + P = 0$ resulta la siguiente ecuación:

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

EJEMPLO 2

Forma una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = 4$.

$$S = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3} \qquad P = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

Aplicando la fórmula $x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{8}{3} = 0$$

resulta la siguiente ecuación:

$$3x^2 - 14x + 8 = 0$$

Cuando se conocen la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado se puede escribir dicha ecuación poniendo la suma cambiada de signo como coeficiente de x y el producto como término independiente.

1. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

a) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ b) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$ c) $x_1 = 6$, $x_2 = 6$ d) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$

2. Descomposición de un trinomio de segundo grado en producto de factores

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN TRINOMIO

Trinomio dado: $y = ax^2 + bx + c$

① $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

② $y = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$

③ $y = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2]$

④ $y = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)]$

⑤ $y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Fórmula para descomponer un trinomio de segundo grado

Descomposición del trinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ en producto de factores.

Vamos a descomponer en producto de factores el trinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$.

Para ello procedemos así:

① Sacamos el factor común **a**.

② Sustituimos en ① $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ por su valor, sabiendo que $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2$ y que $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$.

③ Hacemos la operación indicada dentro del paréntesis: $-(x_1 + x_2)\,x = -x_1x - x_2x$.

④ Sacamos factor común **x** en $x^2 - xx_1$:

$$x^2 - xx_1 = x(x - x_1)$$

y sacamos el factor común x_2 en $-x_2x + x_1x_2$:

$$-x_2x + x_1x_2 = -x_2(x - x_1)$$

⑤ Finalmente sacamos el factor común $x - x_1$ en la expresión $x(x - x_1) - x_2(x - x_1)$:

$$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

De este modo el trinomio queda descompuesto en producto de factores según indica la fórmula siguiente:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

EJEMPLO 1

Vamos a descomponer en producto de factores el trinomio $y = 2x^2 - 7x + 3$.

En primer lugar hay que encontrar las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} =$$

$$= \frac{7 \pm 5}{4} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aplicando esta fórmula:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

se tiene $2x^2 - 7x + 3 = 2(x - 3) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$

EJEMPLO 2

Vamos a descomponer en producto de factores el trinomio $5x^2 - 14x - 3$.

Para ello resolvemos en primer lugar la ecuación $5x^2 - 14x - 3 = 0$:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 60}}{10} =$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{256}}{10} = \frac{14 \pm 16}{10} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Aplicando esta fórmula:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

se tiene $5x^2 - 14x - 3 = 5(x - 3) \cdot \left(x + \frac{1}{5}\right)$

3. Ecuaciones bicuadradas

REDUCCIÓN DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA A OTRA DE SEGUNDO GRADO

Ecuación bicuadrada → $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Sustituciones → $\left\{ \begin{matrix} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{matrix} \right\}$

Ecuación de segundo grado → $az^2 + bz + c = 0$

Ecuación bicuadrada.

Se llama ecuaciones bicuadradas a las ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Una ecuación bicuadrada se puede reducir a una ecuación de segundo grado mediante las sustituciones:

$$x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2$$

La ecuación de segundo grado que resulta es ésta:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Si llamamos z_1 y z_2 a las soluciones de esta última ecuación, las soluciones de la ecuación bicuadrada serán:

$$x = \pm\sqrt{z_1} \begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} \\ x_2 = -\sqrt{z_1} \end{cases} \qquad x = \pm\sqrt{z_2} \begin{cases} x_3 = +\sqrt{z_2} \\ x_4 = -\sqrt{z_2} \end{cases}$$

Observa que si z_1 y z_2 son números positivos una ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones, que es el número máximo de soluciones posibles.

EJEMPLO 1

Vamos a resolver la ecuación bicuadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Para ello primero se transforma en la ecuación de segundo grado $z^2 - 13z + 36 = 0$:

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$x^2 = 9 \qquad x^2 = 4$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$

Las soluciones son 3, −3, 2, −2.

EJEMPLO 2

Vamos a resolver la ecuación bicuadrada $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$.

Haciendo $x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2$, y sustituyendo resulta la ecuación de segundo grado

$$z^2 - 16z - 225 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$z = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 900}}{2} = \frac{16 \pm 34}{2} \begin{cases} 25 \\ -9 \end{cases}$$

$z_1 = 25 \qquad z_2 = -9$

$x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

$x^2 = -9$

Esta ecuación, que tiene el segundo miembro negativo, es imposible, luego las soluciones de la ecuación dada son solamente 5 y −5.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ g) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ h) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

c) $x^4 - 169x^2 = 0$ f) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ i) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

2. Indica las cuatro soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 101x^2 + 100 = 0$ b) $x^4 - 82x^2 + 81 = 0$ c) $x^4 - 122x^2 + 121 = 0$

Actividades

1. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que la suma de sus soluciones es $\frac{-20}{3}$ y que su producto es $\frac{-7}{3}$

   ¿Cuáles son estas soluciones?

2. Descompón en producto de factores el trinomio $\mathbf{p(x)} = 5x^2 - 31x + 6$.

3. Descompón los siguientes trinomios de segundo grado en producto de factores:

   a) $x^2 + 2x - 35$
   b) $x^2 + 13x + 40$
   c) $x^2 - 4x - 60$
   d) $x^2 + 7x - 78$
   e) $6x^2 - 13x + 2$
   f) $4x^2 - 13x + 3$

4. Simplificación de fracciones algebraicas.

EJEMPLO RESUELTO

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios. Si los polinomios que forman una fracción algebraica son dos trinomios de segundo grado, se puede simplificar dicha fracción cuando las ecuaciones que resultan de igualar a cero dichos términos tienen alguna solución común.

Sea la fracción $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

- Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ son 2 y 1, luego $x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1)$.
- Las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ son 2 y 3, luego $x^2 - 5x + 6 = (x-2) \cdot (x-3)$.

Por tanto, se simplifica el factor $x - 2$:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{(x-2)}\ (x-1)}{\cancel{(x-2)}\ (x-3)} = \frac{x-1}{x-3}$$

Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$
b) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6}$
c) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$
d) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9x + 18}$

5. La suma de dos números es 5, y su producto es -84. Halla dichos números.

6. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

   a) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{4}$
   b) $x_1 = \frac{-1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$
   c) $x_1 = \frac{-1}{4}$, $x_2 = 2$
   d) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

   a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
   b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
   c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
   d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
   e) $x^4 - 16 = 0$
   f) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

8. Halla la suma y el producto de las raíces de la ecuación $28x^2 - 41x + 15 = 0$.

   Comprueba el resultado resolviendo la ecuación.

9. Una solución de la ecuación

   $$8x^2 - 14x + c = 0 \text{ es } \frac{1}{4}$$

   ¿Cuál es la otra solución? ¿Cuánto vale **c**?

10. En la ecuación $x^2 - 10x + c = 0$ el producto de las soluciones vale 24.

    ¿Cuál es el valor de **c**?

11. Las dos soluciones de la ecuación

    $$x^2 - mx - 15 = 0$$

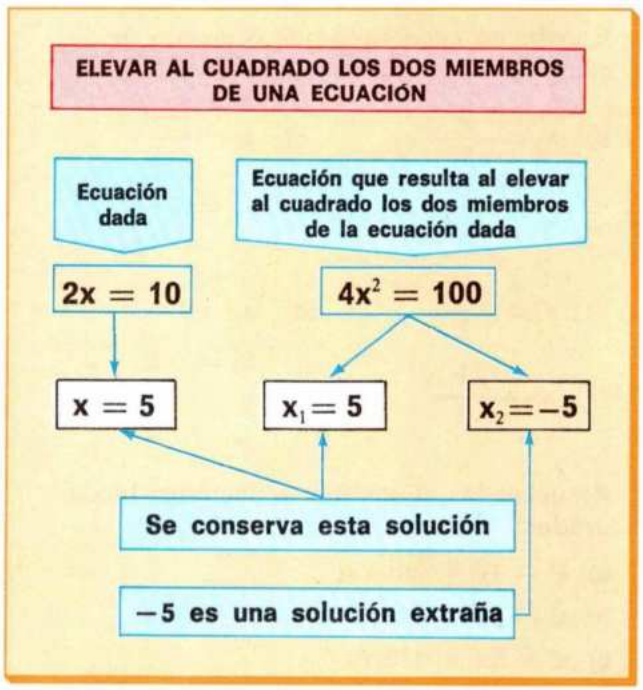
    ¿tienen el mismo signo o signo contrario?

12. Simplifica las siguientes fracciones:

    a) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
    b) $\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 9x + 8}$

4. Ecuaciones irracionales

¿Qué ocurre cuando se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación?



Recuerda que dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes.**

Recuerda también que cuando a los dos miembros de una ecuación se les suma el mismo número o cuando se multiplican los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero resulta otra ecuación equivalente a la dada.

¿Qué ocurrirá si se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación?

Consideremos la ecuación $2x = 10$, de solución $x = 5$.

Elevando al cuadrado los dos miembros resulta la ecuación $4x^2 = 100$, que tiene por soluciones $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$. Por tanto, la ecuación $4x^2 = 100$ no es equivalente a la ecuación dada.

El número -5 es solución de la ecuación $4x^2 = 100$, pero no es solución de la ecuación $2x = 10$. Se dice que -5 es una solución extraña, introducida al elevar al cuadrado.

Observa que la solución $x = 5$ de la primera ecuación $2x = 10$ es también solución de la ecuación $4x^2 = 100$.

Al elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación se obtiene otra ecuación que en general no es equivalente a la dada, pero toda solución de la primera ecuación es solución de la segunda.

Ecuaciones irracionales.

Se llama **ecuaciones irracionales** a aquellas ecuaciones que tienen la incógnita bajo el signo radical.

Vamos a resolver las ecuaciones irracionales que tienen la incógnita bajo el signo de la raíz cuadrada, que se considera siempre positiva.

Para resolver la ecuación irracional $\sqrt{x} + 3 = 2x - 3$ se procede del modo siguiente:

(1) Despejamos el radical cuadrático $\sqrt{x}$.

(2) Elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación que resulte en (1).

(3) Desarrollando el cuadrado y pasando x al segundo miembro resulta la ecuación $4x^2 - 25x + 36 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = \frac{9}{4}$

Comprueba que sólo vale la solución $x_1 = 4$.

La solución $x_2 = \frac{9}{4}$ es una solución extraña.

Actividades

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Hay que pintar dos fachadas de una casa. La primera tiene un área doble que la segunda.

Un equipo de pintores trabaja pintando en la fachada grande la mitad de una jornada.

Después el equipo se divide en dos grupos iguales y durante la segunda mitad del día uno de los grupos termina de pintar la fachada grande, mientras que el otro grupo trabaja en la fachada pequeña.

Al final de la jornada la fachada grande queda enteramente pintada, pero no la pequeña, que para acabarla tiene que trabajar un pintor del equipo una jornada completa.

¿Cuántos pintores tiene el equipo?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Las soluciones de una ecuación de segundo grado son 4 y -3. Escribe la ecuación.

2. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

b) $x_1 = -7$, $x_2 = 7$

c) $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{1}{5}$

d) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{3}$

e) $x_1 = 7$, $x_2 = 10$

3. Escribe la ecuación de segundo grado que tiene por soluciones 8 y -8. ¿Cómo son las ecuaciones de segundo grado que tienen por soluciones números opuestos?

4. La suma de dos números es 28, y el producto, 192. Halla estos números.

5. Descompón en producto de factores los siguientes trinomios aplicando la fórmula $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

a) $x^2 - 7x + 12$

b) $x^2 - 9x + 20$

c) $6x^2 - 25x + 4$

d) $x^2 - 13x + 42$

e) $x^2 + 6x - 40$

f) $x^2 - 25$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$

b) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

c) $x^4 - 101x^2 + 100 = 0$

d) $x^4 - 77x^2 - 324 = 0$

7. Las soluciones de una ecuación de segundo grado son 5 y -6. Escribe la ecuación de segundo grado que tenga estas soluciones y cuyo coeficiente de x sea 3.

8. Una solución de la ecuación $x^2 - mx + 8 = 0$ es 4. Calcula el valor de m.

Sugerencia Sustituye x por 4.

9. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$x - y = 5 \qquad x \cdot y = 84$

Para ello, despeja x en la primera ecuación y sustituye su valor en la segunda.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales. En cada caso indica si hay alguna raíz extraña.

a) $\sqrt{2x - 1} = x - 2$

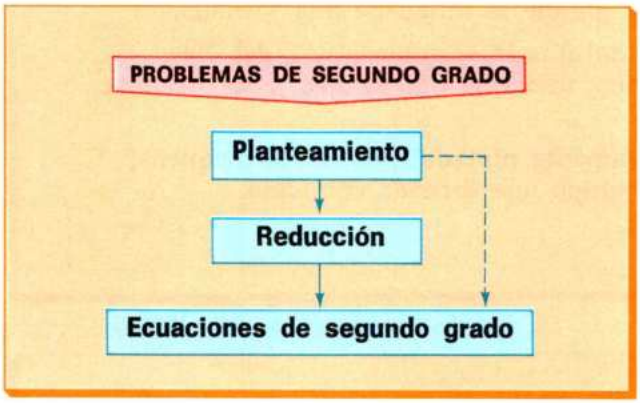
b) $\sqrt{5x + 4} - 1 = 2x$

c) $\sqrt{x} = 6 - x$

d) $3\sqrt{x - 1} + 10 = 2x - 1 \rightarrow 3\sqrt{x - 1} = 2x - 11 \rightarrow 9(x - 1) = (2x - 11)^2$

TEMA 23 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Problemas numéricos de segundo grado. I



Problemas numéricos.

Se llama **problemas de segundo grado** a aquellos problemas que se plantean mediante una ecuación de segundo grado o mediante una ecuación reducible a otra de segundo grado.

Al resolver la ecuación, conviene comprobar si las soluciones obtenidas cumplen las condiciones del enunciado.

PROBLEMA 1

Hay un número natural tal que al sumarle 8 y multiplicar la suma por el número que resulta al restarle 3 da como producto 476.

¿Cuál es ese número natural?

① PLANTEAMIENTO

Llamamos x al número natural que se busca.

- Al sumarle 8 a x resulta $x + 8$.
- Al restarle 3 a x resulta $x - 3$.
- Al multiplicar $x + 8$ por $x - 3$. resulta 476.

Así resulta esta ecuación, que se puede transformar en otra de segundo grado:

$$(x + 8) \cdot (x - 3) = 476$$

② RESOLUCIÓN

$$(x + 8) \cdot (x - 3) = 476$$
$$x^2 + 8x - 3x - 24 = 476$$
$$x^2 + 5x - 500 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 2000}}{2} =$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{2025}}{2} = \begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = -25 \end{cases}$$

③ COMPROBACIÓN

Los dos valores de x (20 y -25) resuelven la ecuación, pero como el número buscado es un número natural, sólo el 20 puede ser la solución del problema.

Se comprueba que el 20 verifica la condición del problema:

$$(20+8) \cdot (20-3) = 28 \cdot 17 = 476$$

Por eso 20 es la solución del problema.

El número natural buscado es 20.

PROBLEMA 2

Hay una fracción de denominador 2 que al sumarla con su inversa se obtiene la fracción $\frac{13}{6}$

¿Cuál es esa fracción?

① PLANTEAMIENTO

- Sea $\frac{x}{2}$ la fracción pedida.
- La suma de $\frac{x}{2}$ con su inversa $\frac{2}{x}$ es $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 4}{2x}$
- Como esta suma vale $\frac{13}{6}$ se tiene la ecuación:

$$\frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{13}{6}$$

② RESOLUCIÓN

$$\frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{13}{6} \rightarrow 6x^2 + 24 = 26x$$
$$6x^2 - 26x + 24 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 3x^2 - 13x + 12 = 0$$
$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{6} =$$
$$= \frac{13 \pm \sqrt{25}}{6} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

③ COMPROBACIÓN

La única solución aceptable es $x = 3$, porque $\frac{x}{2}$ es una fracción de denominador 2.

Las fracciones $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son fracciones inversas y su suma es

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9 + 4}{6} = \frac{13}{6}$$

La fracción buscada es $\frac{3}{2}$

2. Problemas numéricos de segundo grado. II

Problemas numéricos.

PROBLEMA 3

Hay un número positivo tal que tres veces su cuarta potencia más siete veces su cuadrado es igual a 76.

¿Cuál es ese número positivo?

① PLANTEAMIENTO

- Sea x el número que se busca.
- 3 veces su cuarta potencia → $3x^4$.
- 7 veces su cuadrado → $7x^2$.
- Como la suma de $3x^4$ y $7x^2$ es 76, se tiene la siguiente ecuación:

$$3x^4 + 7x^2 = 76$$

Ecuación bicuadrada: $3x^4 + 7x^2 - 76 = 0$

② RESOLUCIÓN

$$3x^4 + 7x^2 - 76 = 0$$

Hacemos $x^2 = z \longrightarrow x^4 = z^2$ y nos queda la ecuación de segundo grado

$$3z^2 + 7z - 76 = 0$$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 912}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{961}}{6} =$$

$$= \frac{-7 \pm 31}{6} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\dfrac{19}{3} \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x^2 = -2 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{-19}{3} \text{ es imposible}$$

③ COMPROBACIÓN

De las dos soluciones de la ecuación la única positiva es 2, que cumple las condiciones del enunciado:

$$\underbrace{3 \cdot 2^4}_{48} + \underbrace{7 \cdot 2^2}_{28} = 76$$

$$48 + 28 = 76$$

Luego el número pedido es 2.

El número positivo buscado es 2.

PROBLEMA 4

Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580.

¿Cuáles son esos números?

① PLANTEAMIENTO

- Llamemos x al número menor.
- El número mayor será → $x + 2$.
- La suma de sus cuadrados es → $x^2 + (x + 2)^2$.
- Como esta suma vale 580, se obtiene esta ecuación:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 580$$

② RESOLUCIÓN

$$x^2 + (x + 2)^2 = 580$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 580$$

$$2x^2 + 4x - 576 = 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow x^2 + 2x - 288 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1152}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{1156}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 34}{2} = \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = -18 \end{cases}$$

③ COMPROBACIÓN

Como los números que se piden en el problema son números naturales, la solución $x_2 = -18$ no es válida.

El menor número es $x = 16$ y el mayor $x + 2 = 18$.

Los números 18 y 16 verifican la condición del problema:

$$16^2 + 18^2 = 256 + 324 = 580$$

Los dos números naturales buscados son 16 y 18.

Problemas geométricos.

DIAGONALES DE UN POLÍGONO CONVEXO

Número de diagonales $= \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$

Número de diagonales del hexágono

$$\frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

9 diagonales

Recuerda que la fórmula que nos da el número de diagonales de un polígono convexo es $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$, donde **n** es el número de lados.

Aplicando la fórmula para un hexágono resulta que este polígono tiene nueve diagonales.

Inversamente, si nos dan el número de diagonales de un polígono podemos averiguar el número de lados que tiene, pero éste es ya un problema de segundo grado.

PROBLEMA 3

El número de diagonales de un polígono convexo es 35.

¿De qué polígono se trata?

① PLANTEAMIENTO

- Llamemos **n** al número de lados del polígono.
- Su número de diagonales será:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

- Como tiene 35 diagonales, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 35$$

② RESOLUCIÓN

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 35$$

$n^2 - 3n = 70 \rightarrow n^2 - 3n - 70 = 0$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9+280}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 17}{2} = \begin{cases} n_1 = 10 \\ n_2 = -7 \end{cases}$$

③ COMPROBACIÓN

Como **n** ha de ser positivo, la única solución posible es $n_1 = 10$; es decir, se trata del decágono, como se comprueba a continuación.

$$\frac{10 \cdot (10-3)}{2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

El polígono buscado es el decágono.

PROBLEMA 4

La suma de las áreas de un cuadrado de lado L *cm y de un rectángulo de lados 2 cm y* 2L *cm es 32 cm².*

¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

① PLANTEAMIENTO

- El área del cuadrado es L^2 cm²
- El área del rectángulo es $2 \cdot 2L = 4L$ cm².
- Suma de las áreas: $L^2 + 4L$.
- Como la suma de las áreas es 32 cm², se tiene la siguiente ecuación: $L^2 + 4L = 32$.

$$L^2 + 4L - 32 = 0$$

② RESOLUCIÓN

$L^2 + 4L - 32 = 0$

$$L = \frac{-4 \pm \sqrt{16+128}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 12}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

③ COMPROBACIÓN

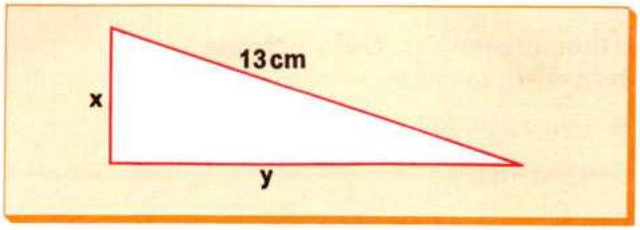
Es evidente que sólo es válida para el problema la solución $x = 4$, ya que verifica la condición del problema.

- Área del cuadrado → $\rightarrow (4 \text{ cm})^2 = 16 \text{ cm}^2$.
- Área del rectángulo → $\rightarrow 2 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$.

$16 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 = 32 \text{ cm}^2$

El lado del cuadrado mide 4 cm.

4. Problemas geométricos de segundo grado. II



Problemas geométricos.

PROBLEMA 1

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y la diferencia entre los catetos es 7 cm.

¿Cuántos centímetros mide cada uno de los catetos?

① PLANTEAMIENTO

Llamemos

$x \rightarrow$ cateto menor

$y \rightarrow$ cateto mayor

- Un cateto en función del otro: $y = 7 + x$.
- Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene $x^2 + y^2 = 13^2$.
- Sustituyendo resulta la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 13^2$$

$$x^2 + (7+x)^2 = 169$$

② RESOLUCIÓN

$$x^2 + (7 + x)^2 = 169$$

$$x^2 + x^2 + 49 + 14x = 169 \rightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -12 \end{cases}$$

③ COMPROBACIÓN

La solución -12 no tiene sentido y no es válida. Por tanto, el cateto menor es $x = 5$ y el mayor $y = 7 + 5 = 12$, ya que cumplen la condición del problema:

$$\underset{\downarrow}{5^2} + \underset{\downarrow}{12^2} = \underset{\downarrow}{13^2}$$

$$25 + 144 = 169$$

Un cateto mide 5 cm y el otro cateto mide 12 cm.

PROBLEMA 2

Se tienen tres tiras cuyas longitudes son 8 cm, 15 cm y 16 cm. Se quiere cortar a cada tira un trozo de igual longitud, de tal forma que las tiras resultantes formen un triángulo rectángulo.

¿Cuál es la longitud del trozo suprimido?

① PLANTEAMIENTO

- Llamemos x al trozo suprimido en cada tira.
- Después de suprimir este trozo, las longitudes de las tiras que quedan serán $(8 - x)$ cm, $(15 - x)$ cm y $(16 - x)$ cm.
- Estas tres tiras forman un triángulo rectángulo, y por el teorema de Pitágoras se tiene la siguiente ecuación:

$$(16-x)^2 = (8-x)^2 + (15-x)^2$$

② RESOLUCIÓN

$$(16 - x)^2 = (8 - x)^2 + (15 - x)^2$$

$$256 - 32x + x^2 = 64 - 16x + x^2 + 225 - 30x + x^2$$

$$x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 132}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

③ COMPROBACIÓN

Como la longitud de la tira menor es 8 cm, y $11 > 8$, la solución $x_1 = 11$ no es válida, luego la solución válida es $x_2 = 3$ cm.

Las longitudes de las nuevas tiras son:

$$8 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$
$$15 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$
$$16 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

Como las tiras de 5 cm, 12 cm y 13 cm verifican el teorema de Pitágoras, $5^2 + 12^2 = 13^2$, entonces el triángulo de lado 5 cm, 12 cm y 13 cm es rectángulo.

La longitud del trozo suprimido es 3 cm.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

A una reunión va un número determinado de parejas (hombre-mujer). Cada persona saluda con un abrazo a todas las demás menos a su compañera o compañero.

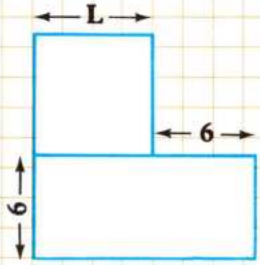
Si en total han dado 60 abrazos ¿cuántas personas se han reunido?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla un número tal que el triple de su cuadrado menos el propio número sea 44.

2. El cuadrado de un número menos su duplo es -1. Calcula ese número.

3. Calcula el lado **L** del cuadrado sabiendo que la suma del área del cuadrado y del rectángulo es 196 cm².



4. El producto de dos números enteros consecutivos es 156.

   Calcula esos números.

5. El perímetro de un rectángulo es 28 cm y su superficie es 48 cm².

   Halla las dimensiones del rectángulo.

6. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 17 cm, y la hipotenusa de este triángulo mide 13 cm.

   Calcula lo que mide cada cateto.

7. La suma de un número entero **x** con su inverso $\frac{1}{x}$ es $\frac{26}{5}$.

   Halla este número.

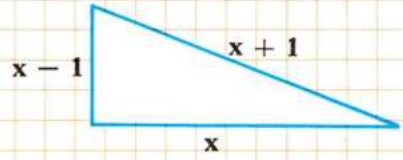
8. El doble de la cuarta potencia de un número más el triple del cuadrado del mismo número da 189.

   ¿Cuál es este número?

9. Si a la cuarta potencia de un número se le resta su cuadrado da 600.

   ¿Cuál es este número?

10. Los lados de un triángulo rectángulo son tres números enteros consecutivos.



   Calcula los tres lados de un triángulo.

11. Descompón el número 20 en números tales que la suma de sus cuadrados sea 232.

12. El número de diagonales de un polígono es 27.

    ¿Cuántos lados tiene el polígono?

13. La razón de dos números naturales es $\frac{2}{3}$ y la suma de sus cuadrados es 52.

    Halla estos números.

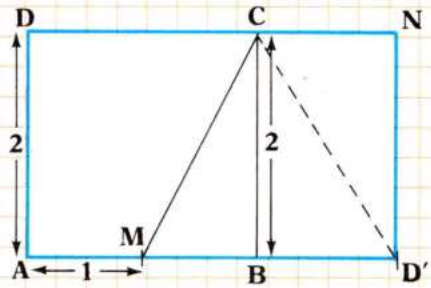
14. Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 280 m y su área 4.800 m².

15. Un rectángulo tiene la misma área que un cuadrado de lado 96 m.

    Halla las dimensiones del rectángulo sabiendo que la altura es $\frac{9}{16}$ de la base.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

EL RECTÁNGULO DE ORO



De acuerdo con las indicaciones de la figura:

— Traza un cuadrado de lado 2 unidades: **ABCD**.

— Une el punto medio **M** de uno de los lados con uno de los vértices opuestos, **C**.

— Con centro en **M** y radio **MC** traza un arco; este arco corta a la recta **AB** en **D'**.

El rectángulo **AD'ND** es el rectángulo de oro.

Fíjate que por el teorema de Pitágoras $\mathbf{MC} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, y por ello $\overline{\mathbf{AD'}} = 1 + \sqrt{5}$.

El rectángulo de oro era ya usado por los arquitectos griegos en las dimensiones de los templos y edificios.

Hoy en día multitud de postales, espejos, cuadros, libros..., ajustan sus dimensiones a las del rectángulo de oro. ¿Le ocurre así a este libro?

Comprueba que el número $\mathbf{e} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, llamado la **sección de oro,** es la razón entre las dimensiones ancho y largo del rectángulo de oro.

Sugerencia Largo $= \overline{\mathbf{AD'}} = 1 + \sqrt{5}$ y ancho $= 2$. Hay que comprobar que $\dfrac{\text{ancho}}{\text{largo}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \mathbf{e}$

PROBLEMAS DE LA VIDA DIARIA

1. Un depósito de forma cilíndrica cuya altura es de 100 dm tiene un volumen de 2.826 dm^3.

Calcular los metros cuadrados de cinc que necesitaremos para ponerle una tapa.

Sugerencia $\mathbf{V} = \pi \mathbf{r}^2\mathbf{h}$, $\pi = 3{,}14$

2. El área de una plaza circular es de 314 m^2. Se quieren plantar árboles alrededor de la plaza a 4 metros de distancia uno del otro.

¿Cuántos árboles se podrán plantar?

3. Se han utilizado 375 m^2 de cristal para las 15 ventanas de una oficina. Todas las ventanas son iguales y tienen forma cuadrangular.

¿Cuáles serán las dimensiones de cada ventana?

¿Cuánto costará el cristal de cada una si cuesta a 500 ptas/m^2?

4. Se quiere vallar un campo rectangular cuya diagonal mide 100 m. El ancho del campo mide 20 metros menos que el largo.

¿Cuántos metros de valla se necesitarán?

¿Cuánto costará vallar el campo si el metro de valla vale 1.250 ptas.?

5. Un señor compra un campo rectangular de 1.000 m^2 de superficie por 1.500.000 ptas.

¿Cuáles son las dimensiones del campo sabiendo que mide 30 metros más de largo que de ancho?

6. Dos niños se intercambian bolas de colores. Una bola blanca la cambian por **x** bolas azules y una bola azul por **x** bolas rojas. Un niño tenía 2 bolas blancas, 4 azules y 3 rojas y al cambiarlas todas por rojas obtiene un total de 73 rojas.

¿Cuál será el valor de **x**?

TEMA 24 REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA. I

1. Representación gráfica de la función $y = ax^2$. I

Gráfico de la función $y = x^2$.

Ya conocemos que los gráficos de las funciones polinómicas de primer grado $f(x) = a$ (función constante), $g(x) = ax$ (función lineal) y $h(x) = ax + b$ (función afín) están todos contenidos en líneas rectas.

Ahora vamos a ocuparnos de los gráficos de las funciones polinómicas de variable racional y de segundo grado; comenzaremos por la función **f**, definida por $f(x) = x^2$, o bien por $y = x^2$.

Observa en la tabla de valores I de la función **f** los siguientes pares ordenados. Estos pares se han representado en la figura 1.

$$(1, 1),\ (-1, 1),\ (2, 4),\ (-2, 4)\ (3, 9),\ (-3, 9)$$

En la tabla de valores II aparecen más pares ordenados de la función $f(x) = x^2$.

Estos pares se han representado en la figura 2.

Podemos imaginar una tabla de valores con infinitos pares ordenados de la función **f**.

El conjunto de todos los pares de esta función determina una línea curva que recibe el nombre de **parábola.**

El punto de coordenadas (0, 0) es el **vértice** de la parábola.

REPRESENTACIÓN DE ALGUNOS VALORES DE LA FUNCIÓN $f(x) = x^2$

Tabla I

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
−1	1
2	4
−2	4
3	9
−3	9

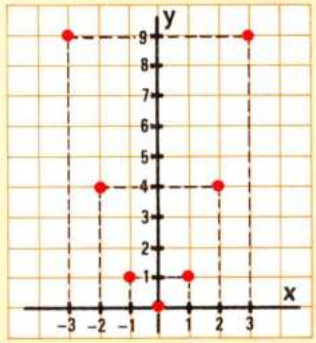


FIGURA 1

Tabla II

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
−1	1
2	4
−2	4
3	9
−3	9
1	1
2	4
−1	1
2	4
1,5	2,25
−1,5	2,25
2,5	6,25
−2,5	6,25

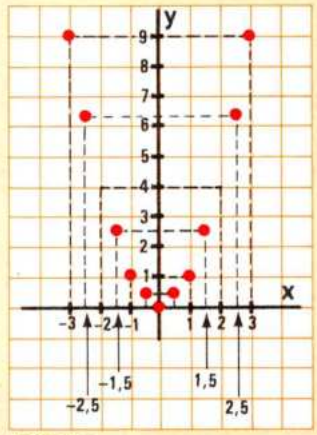


FIGURA 2

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN $f(x) = x^2$: PARÁBOLA

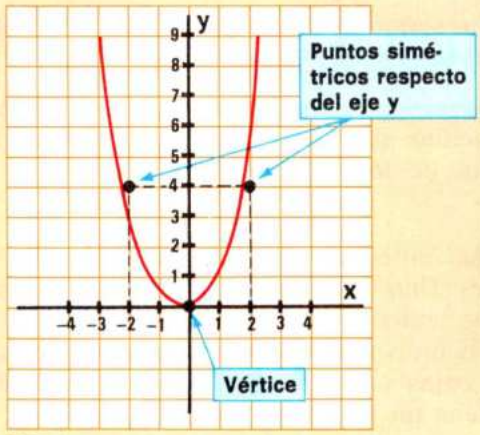


FIGURA 3

Simetría respecto del eje de ordenadas.

Observa que la imagen de dos números opuestos es siempre la misma. Así, $f(2) = f(-2) = 4$, y en general, $f(x) = f(-x) = x^2$.

Esto significa que los puntos de la parábola de abscisas opuestas, son simétricos respecto del eje de ordenadas.

En general, el gráfico de la función $f(x) = x^2$ es simétrico respecto del eje de ordenadas (figura 3).

El eje de ordenadas es el eje de simetría de la parábola de ecuación $f(x) = x^2$.

2. Representación gráfica de la función $y = ax^2$. II

Gráficos de las funciones $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$.

(a) **GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES** $\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=2x^2 \end{cases}$

Tablas de valores de f y g

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4	9	9	...

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
$g(x) = 2x^2$	0	2	2	8	8	18	18	...

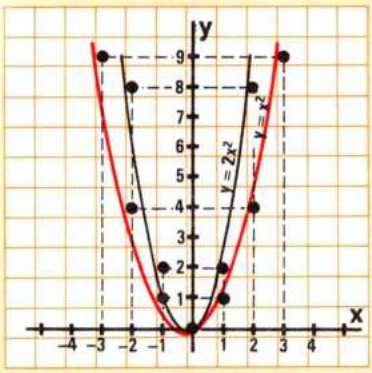


FIGURA 4

(a) Observa las tablas de valores y los gráficos de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

En la figura 4 se ha representado en negro la función $g(x) = 2x^2$ y se ha representado en rojo la función $f(x) = x^2$.

En las tablas de valores de estas funciones se observa que, para cada valor de **x**, la imagen mediante la función **g** es doble que la imagen mediante la función **f**:

$$g(x) = 2x^2 = 2 \cdot f(x)$$

Por eso la representación gráfica de la función $g(x) = 2x^2$ es una curva análoga a la gráfica de la función $f(x) = x^2$, pero más estrecha que ésta.

Los gráficos de las dos funciones **f** y **g** tienen el mismo vértice (0, 0) y el mismo eje de simetría (eje de ordenadas), pero la parábola de ecuación $g(x)=2x^2$ es más estrecha que la parábola de ecuación $f(x)=x^2$.

(b) **GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES** $\begin{cases} f(x)=x^2 \\ h(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Tablas de valores de f y h

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
$f(x)=x^2$	0	1	1	4	4	9	9
$h(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2	4,5	4,5

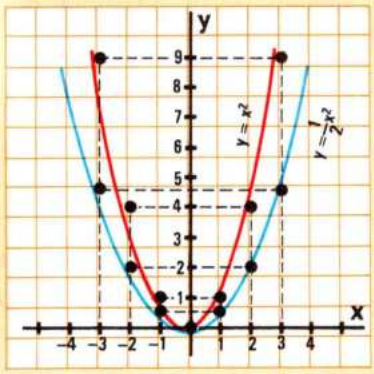


FIGURA 5

(b) Consideremos ahora la función monomio de segundo grado **h**, definida por $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, o definida también por la ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$.

En la tabla de valores se observa que para cada valor de **x** la imagen mediante la función $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad que la imagen mediante la función $f(x) = x^2$.

Por eso la representación gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ (figura 5) es una parábola análoga a la gráfica de la función $f(x) = x^2$, pero más ancha que ésta.

En la figura 5 se ha representado en azul la función $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ y se ha representado en rojo la función $f(x) = x^2$.

Observa en las funciones $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ que la imagen de dos números opuestos es la misma. Así, $g(2) = g(-2) = 8$; $h(2) = h(-2) = 2$.

En general, $g(x)=g(-x)=2x^2$ y $h(x)=h(-x) = \frac{1}{2}x^2$.

Por eso los gráficos de las funciones **g** y **h** son simétricos respecto del eje de ordenadas.

3. Representación gráfica de la función $y = ax^2$. III

Gráfico de la función $y = -x^2$.

GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ m(x) = -x^2 \end{cases}$

Tabla de valores

x	$y = x^2$	$y = -x^2$
0	0	0
1	1	−1
−1	1	−1
2	4	−4
−2	4	−4
3	9	−9
−3	9	−9

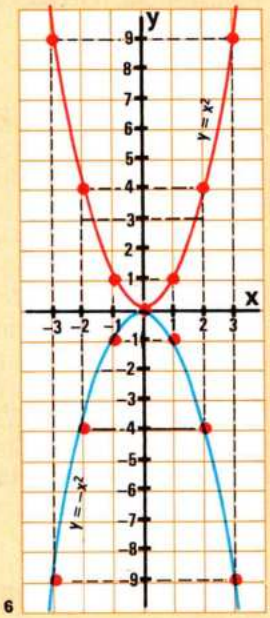


FIGURA 6

Consideremos las funciones de variable racional **f**, definidas por $f(x) = x^2$ y $m(x) = -x^2$. Estas ecuaciones también quedan definidas por las ecuaciones $y = x^2$ e $y = -x^2$ respectivamente.

Observa la tabla de valores de estas dos funciones.

En la segunda y tercera columnas de la tabla se advierte que la función $m(x) = -x^2$ tiene los mismos valores que la función $f(x) = x^2$, pero opuestos:

$$f(1) = 1 \qquad m(1) = -1$$
$$f(2) = 4 \qquad m(2) = -4$$

Por esta razón las parábolas de ecuaciones $f(x) = x^2$ y $m(x) = -x^2$ son simétricas, y el eje de abscisas es el eje de simetría, como se observa en la figura 6.

Gráficos de las funciones $y = -2x^2$ e $y = \frac{-1}{2}x^2$.

GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES $\begin{cases} y = -2x^2 \\ y = \frac{-1}{2}x^2 \end{cases}$

Tabla de valores

x	0	1	2	−2	3	−3
$y = -x^2$	0	−1	−4	−4	−9	−9
$y = -2x^2$	0	−2	−8	−8	−18	−18
$y = -\frac{1}{2}x^2$	0	$-\frac{1}{2}$	−2	−2	−4,5	−4,5

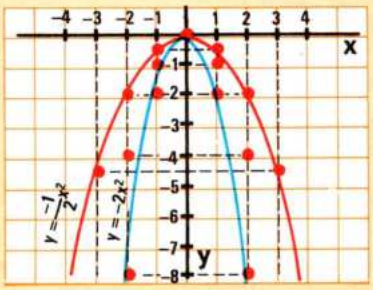


FIGURA 7

Observa la tabla de valores de las funciones de ecuaciones $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = \frac{-1}{2}x^2$.

Se advierte que las ordenadas de la función $y = -2x^2$ se obtienen multiplicando por 2 las ordenadas de la función $y = -x^2$.

Por eso la representación gráfica de la función $y = -2x^2$ es una parábola análoga a la parábola de ecuación $y = -x^2$, pero más estrecha que ésta.

También se observa en la tabla que las ordenadas de la función $y = \frac{-1}{2}x^2$ se obtienen multiplicando por $\frac{1}{2}$ las ordenadas de la función $y = -x^2$.

Por eso la representación gráfica de la función $y = \frac{-1}{2}x^2$ es una parábola análoga a la parábola de ecuación $y = -x^2$, pero más ancha que ésta, como se observa en la figura 7.

4. Observaciones generales sobre la parábola de ecuación $y = ax^2$

Semiplanos que determina el eje de abscisas.

FIGURA 8

El eje de abscisas divide el plano en dos semiplanos: el semiplano superior o **semiplano de ordenadas positivas** y el semiplano inferior o **semiplano de ordenadas negativas.**

En todos los puntos del semiplano superior se verifica que la ordenada **y** es positiva ($y > 0$) y en los puntos del semiplano inferior se verifica que la ordenada **y** es negativa ($y < 0$). Ver figura 8.

Posición y vértice de las parábolas de ecuación $y = ax^2$.

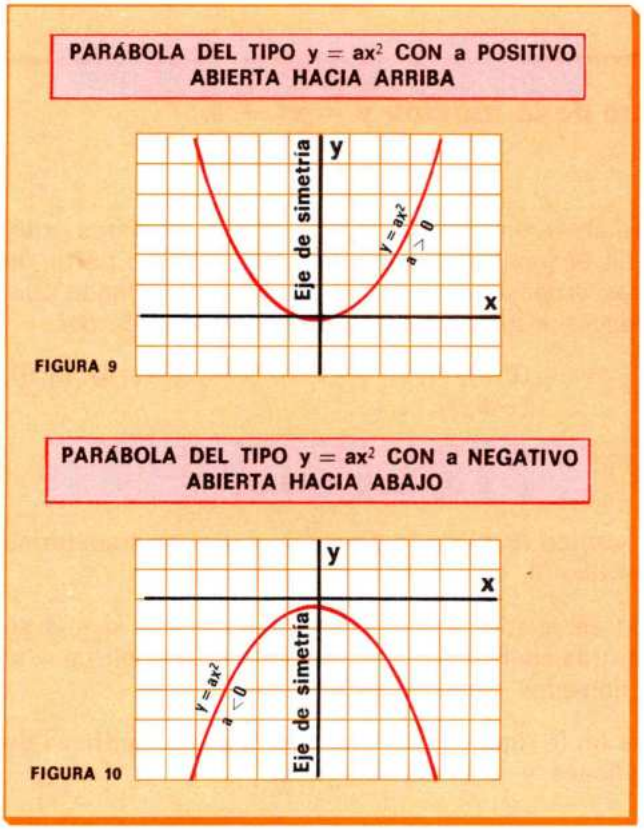


FIGURA 9

FIGURA 10

Hemos visto que las parábolas de ecuación tipo $y = ax^2$, cuando **a** es positivo ($a > 0$), están abiertas hacia arriba y se encuentran en el semiplano de ordenadas positivas.

En las parábolas anteriores el punto de abscisas 0 es el punto de menor ordenada, y este punto (0, 0) es el vértice de dichas parábolas.

También hemos visto que las parábolas de ecuación $y = ax^2$, cuando **a** es negativo ($a < 0$), están abiertas hacia abajo y se encuentran en el semiplano de ordenadas negativas.

El punto de abscisas 0 es el punto de mayor ordenada en las parábolas anteriores, y este punto (0, 0) es el vértice de dichas parábolas.

Observa en las figuras 9 y 10 que tanto si **a** es mayor que cero ($a > 0$) como si **a** es menor que cero ($a < 0$) las parábolas de ecuaciones $y = ax^2$ tienen por eje de simetría el eje de ordenadas.

La representación gráfica de las funciones de ecuación $y = ax^2$ es una parábola que tiene por vértice el origen de coordenadas. Esta parábola se encuentra en el semiplano de ordenadas positivas si $a > 0$ y en el semiplano de ordenadas negativas si $a < 0$.

La parábola de ecuación $y = ax^2$ tiene por eje de simetría el eje de ordenadas.

5. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + c$

Gráfico de la función $y = x^2 + 4$.

GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x^2 \end{cases}$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
$y = x^2$	0	1	1	4	4	9	9	...
$y = x^2 + 4$	4	5	5	8	8	13	13	...

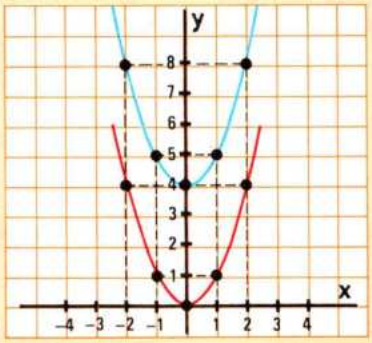


FIGURA 11

Observa en la tabla los valores de la función $y = x^2$ y de la función $y = x^2 + 4$.

Fíjate en que los pares ordenados de la función $y = x^2 + 4$ se obtienen a partir de los pares ordenados de la función $y = x^2$ sumando cuatro unidades a la segunda componente de cada par:

$y = x^2 \longrightarrow (0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9), (-3, 9), \ldots$

$y = x^2 + 4 \longrightarrow (0, 4), (1, 5), (-1, 5), (2, 8), (-2, 8), (3, 13), \ldots$

Así, el vértice (0, 0) de la parábola $y = x^2$ se transforma en el vértice (0, 4) de la parábola $y = x^2 + 4$.

También se puede decir que la parábola de ecuación $y = x^2 + 4$ se obtiene a partir de la parábola $y = x^2$ trasladando ésta cuatro unidades hacia arriba (figura 11).

Gráfico de la función $y = x^2 - 4$.

GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x^2 \end{cases}$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
$y = x^2$	0	1	1	4	4	9	9	...
$y = x^2 - 4$	−4	−3	−3	0	0	5	5	...

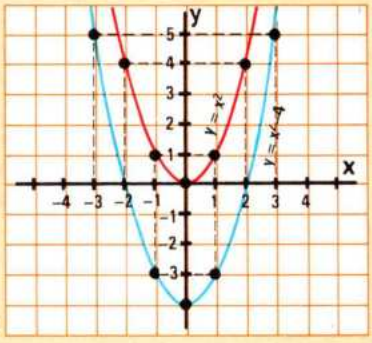


FIGURA 12

Observa ahora en la tabla de valores que los pares ordenados de la función $y = x^2 - 4$ se obtienen a partir de los pares ordenados de la función $y = x^2$ restando cuatro unidades a la segunda componente de cada par:

$y = x^2 \longrightarrow (0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9), (-3, 9), \ldots$

$y = x^2 - 4 \longrightarrow (0, -4), (1, -3), (-1, -3), (2, 0), (-2, 0), (3, 5), (-3, 5), \ldots$

Así, el vértice (0, 0) de la parábola $y = x^2$ se transforma en el vértice (0, −4) de la parábola $y = x^2 - 4$.

También se puede decir que la parábola $y = x^2 - 4$ se obtiene trasladando los puntos de la parábola $y = x^2$ cuatro unidades hacia abajo.

Observa en la figura 12 las representaciones gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = x^2 - 4$.

La representación gráfica de la función de ecuación $y = ax^2 + c$ es una parábola que tiene por vértice el punto (0, c) y que tiene por eje de simetría el eje de ordenadas. Si $a > 0$ se abre hacia el semiplano de ordenadas positivas, y si $a < 0$ se abre hacia el semiplano de ordenadas negativas.

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Observa en los ejes de coordenadas los puntos representados **A**, **A'**, **B**, **B'**, **C** y **C'**.

Escribe las coordenadas de estos puntos.

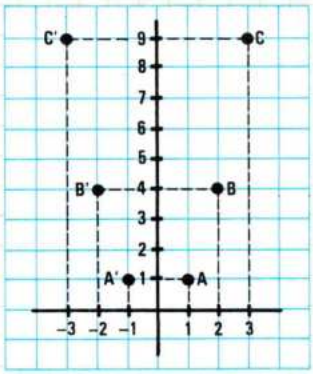
¿Qué tienen en común las coordenadas de los puntos **A** y **A'**?

¿Y las coordenadas de los puntos **B** y **B'**?

¿Y las coordenadas de **C** y **C'**?

Los puntos **A** y **A'** son simétricos respecto al eje de ordenadas.

Indica otros pares de puntos simétricos respecto del eje de ordenadas.



2. Dadas las funciones cuadráticas de ecuaciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x^2$ calcula:

a) $f(1)$ y $g(1)$

b) $f(2)$ y $g(2)$

c) $f(4)$ y $g(4)$

d) ¿Qué relación hay entre $f(x)$ y $g(x)$?
$g(x) = \ldots f(x)$

3. Representa en papel cuadriculado los gráficos de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x^2$.

Escribe las coordenadas de dos puntos simétricos respecto del eje de ordenadas pertenecientes a la parábola de ecuación $f(x) = x^2$.

Escribe las coordenadas de dos puntos simétricos respecto del eje de ordenadas pertenecientes a la parábola de ecuación $g(x) = 2x^2$.

4. ¿Cuál es el vértice de todas las parábolas que tengan una ecuación de la forma $y = ax^2$?

5. Representa en los mismos ejes de coordenadas las parábolas de ecuaciones $f(x) = 2x^2$ y $h(x) = -2x^2$.

¿Cómo son estas parábolas?

Si $f(x_1) = 50$ ¿cuál será el valor de $h(x_1)$?

Si $f(x_2) = 72$ ¿cuál es el valor de x_2?

Si $h(x_3) = -98$ ¿cuál es el valor de x_3?

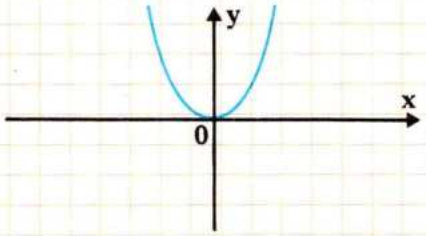
6. Algunas de las siguientes funciones se han representado gráficamente.

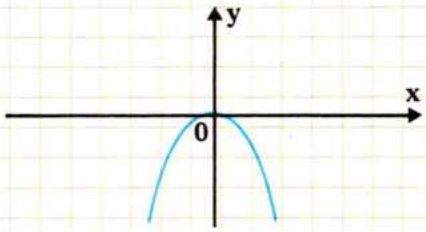
¿Cuáles son estas funciones?

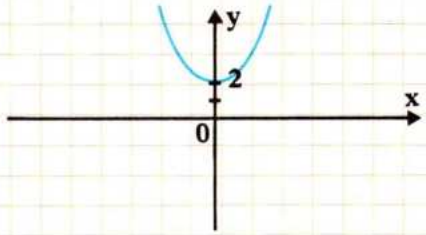
$y = x^2$ $\quad y = x^2 + 2$ $\quad y = -x^2 - 3$

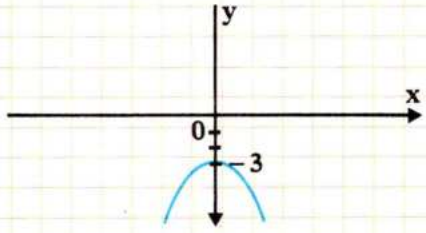
$y = 20x^2 + 1$ $\quad y = -x^2$ $\quad y = x^2 + 7$

Calca estas parábolas en tu cuaderno y escribe debajo de cada una su ecuación.









7. ¿Qué tienen en común las parábolas de ecuaciones $y = 3x^2 + 7$ $\quad y = 2x^2 + 7$?

TEMA 25 REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA. II

1. Representación gráfica de la función $y = a(x + h)^2$

Gráficos de las funciones $y = (x - 3)^2$ e $y = (x + 3)^2$.

GRÁFICOS DE LAS FUNCIONES $y = (x + 3)^2$, $y = (x - 3)^2$, $y = -(x - 3)^2$

Tabla de valores

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
$y = x^2$	0	1	1	4	4	9	9
$y = (x + 3)^2$	9	16	4	25	1	36	0
$y = (x - 3)^2$	9	4	16	1	25	0	36

(a)

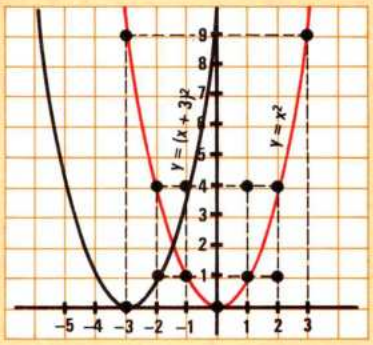


FIGURA 1

(b)

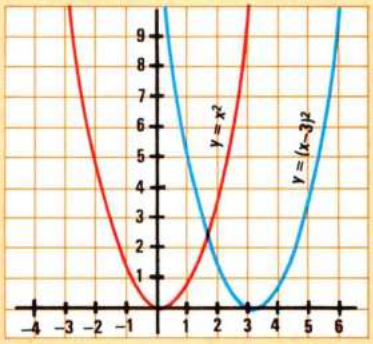


FIGURA 2

(c)

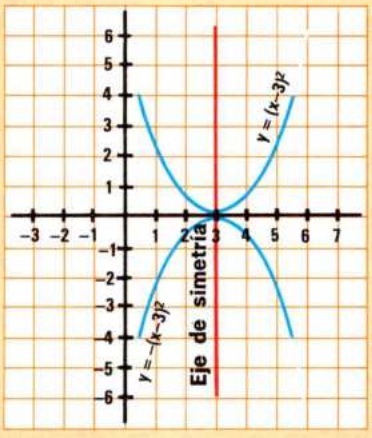


FIGURA 3

Observa las tablas de valores de estas tres funciones y sus gráficos:

$y = x^2$ $\quad$ $y = (x + 3)^2$ $\quad$ $y = (x - 3)^2$

(a) En la figura 1 se observa que la parábola de ecuación $y = (x + 3)^2$ (parábola en negro) es idéntica a la parábola de ecuación $y = x^2$ (parábola en rojo), pero trasladada tres unidades a la izquierda.

El vértice de esta parábola es el punto de coordenadas $(-3, 0)$, y la recta paralela al eje de ordenadas trazada por el vértice es su eje de simetría.

(b) En la figura 2 se observa que la parábola de ecuación $y = (x - 3)^2$ (parábola en azul) es idéntica a la parábola de ecuación $y = x^2$ (parábola en rojo), pero trasladada tres unidades a la derecha.

El vértice de esta parábola es el punto de coordenadas $(3, 0)$ y la recta paralela al eje de ordenadas trazada por el vértice es su eje de simetría.

(c) En la figura 3 se observa que la parábola de ecuación $y = -(x - 3)^2$ es simétrica respecto del eje de abscisas de la parábola de ecuación $y = (x - 3)^2$.

La parábola de ecuación $y = (x + h)^2$ se obtiene a partir de la parábola de ecuación $y = x^2$ desplazando la abscisa de cada punto de ésta una distancia h (hacia la izquierda si h es positivo y hacia la derecha si h es negativo).

Del mismo modo se obtiene la parábola de ecuación $y = a(x + h)^2$ a partir de la parábola de ecuación $y = ax^2$.

2. Representación gráfica de la función $y = a(x + h)^2 + k$

Gráfico de la función $y = (x + 1)^2 + 4$.

GRÁFICO DE LAS FUNCIONES
$y = x^2$, $y = (x + 1)^2$, $y = (x + 1)^2 + 4$

Tabla de valores

x	−2	−1	0	1	2	...
$y = x^2$	4	1	0	1	4	...
$y=(x+1)^2$	1	0	1	4	9	...
$y=(x+1)^2+4$	5	4	5	8	13	...

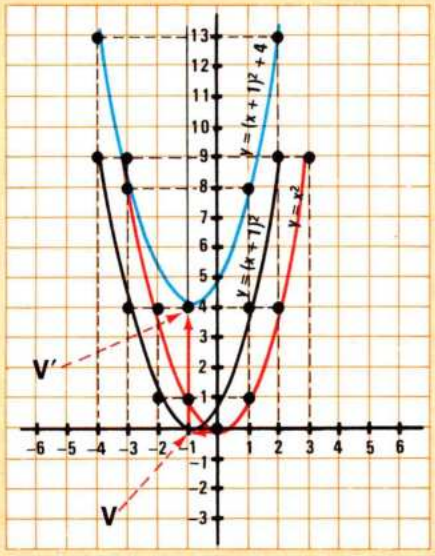


FIGURA 4

EJE DE SIMETRÍA DE LAS PARÁBOLAS DE ECUACIONES $\begin{cases} y = (x + 1)^2 \\ y = (x + 1)^2 + 4 \end{cases}$

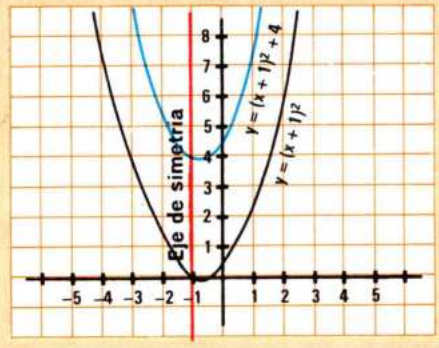


FIGURA 5

La parábola de ecuación $y = (x + 1)^2$ se puede obtener, según sabemos, a partir de la parábola de ecuación $y = x^2$ trasladando esta última una unidad hacia la izquierda (figura 4).

Observa ahora las tablas de valores de las funciones $y = (x + 1)^2$ e $y = (x + 1)^2 + 4$.

Fíjate en las filas segunda y tercera de la tabla y comprueba que las ordenadas de la función $y = (x + 1)^2 + 4$ son cuatro unidades mayores que las ordenadas de la función $y = (x + 1)^2$.

Por esta razón la parábola de ecuación $y = (x + 1)^2 + 4$ se puede obtener a partir de la parábola de ecuación $y = (x + 1)^2$ trasladando ésta cuatro unidades hacia arriba.

Observa que el vértice de la parábola de ecuación $y = (x + 1)^2 + 4$ se obtiene a partir del vértice de la parábola de ecuación $y = (x + 1)^2$ sumando cuatro unidades a la ordenada.

$$V(-1, 0) \xrightarrow{\text{sumando 4 a la ordenada}} V'(-1, 4)$$

Observa en la figura 5 que ambas parábolas tienen por eje de simetría la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa $x = -1$.

La parábola de acuación $y = a(x + h)^2 + k$ se puede obtener a partir de la parábola de ecuación $y = a(x + h)^2$ trasladando ésta k unidades hacia arriba o hacia abajo, según k sea positivo o negativo.

La parábola $y = a(x + h)^2 + k$ tiene por vértice el punto $(-h, k)$ y por eje de simetría la recta paralela al eje de ordenadas por el punto de abscisa $x = -h$.

1. Escribe el vértice de cada una de estas parábolas e indica cuál es su eje de simetría.

a) $y = x^2$ c) $y = x^2 + 2$ e) $y = (x - 5)^2$ g) $y = 3(x - 5)^2$

b) $y = -x^2$ d) $y = x^2 - 2$ f) $y = (x + 5)^2$ h) $y = -2(x + 5)^2$

3. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$

Gráfico de la función $y = x^2 - 6x + 8$.

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN DE ECUACIÓN $y = x^2 - 6x + 8$

① Se calcula el vértice

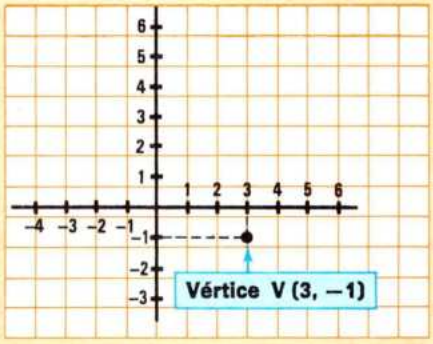


FIGURA 6

② Se hallan los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas

a) **Puntos de corte con el eje y:**
$x = 0 \rightarrow y = 8 \rightarrow$ **Punto C (0, 8)**

b) **Punto de intersección con el eje x:**
$x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

③ Se calculan algunos puntos auxiliares

x	0	1	5	...
y	8	3	3	...

Puntos de corte A(2, 0) y B(4, 0)

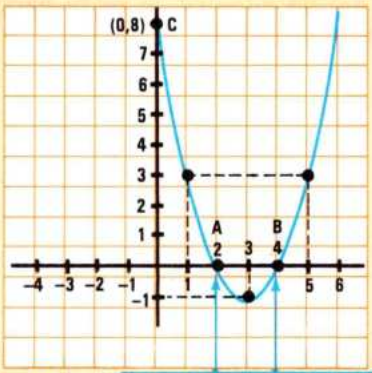


FIGURA 7

Vamos a representar la función polinómica de segundo grado **f** definida por $f(x) = y = x^2 - 6x + 8$.

Para ello se procede del modo siguiente:

① **Se escribe la función polinómica dada en la forma $y = a(x + h)^2 + k$, con lo que se encuentra el vértice $(-h, k)$, que es el punto más importante de la parábola.**

Como los dos primeros términos $x^2 - 6x$ del trinomio $x^2 - 6x + 8$ recuerdan el cuadrado de $x - 3$, que es $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, se escribe el trinomio dado de modo que figure el cuadrado $(x - 3)^2$:

$$y = x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + \underbrace{9 - 1}_{8} = (x - 3)^2 - 1$$

Así se tiene escrita la función dada en la forma $y = a(x + h)^2 + k$, es decir, $y = (x - 3)^2 - 1$, con lo cual hemos encontrado el vértice, que es el punto $(-h, k) = (3, -1)$ y es el punto más importante de la parábola (figura 6).

Como $a = 1 > 0$, la parábola está abierta hacia arriba.

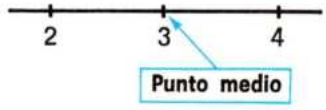
② **Se hallan, si existen, los puntos de intersección o de corte de la parábola con los ejes de coordenadas.**

Como todos los puntos del eje de abscisas tienen ordenada 0, para hallar los puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas se hace $y = 0$ en la función $y = x^2 - 6x + 8$. Así resulta la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$, luego los puntos de corte con el eje **x** son **A**(2, 0) y **B**(4, 0).

Como todos los puntos del eje de ordenadas tienen de abscisa 0, para hallar los puntos de intersección con el eje de ordenadas se hace $x = 0$ en la función $y = x^2 - 6x + 8$. Así resulta $y = 8$, luego el punto **C**(0, 8) es el punto de intersección de la parábola con el eje **y**.

③ Si es necesario, se calculan algunos puntos auxiliares obteniendo una tabla de valores.

Nota. Observa en la figura 7 que la abscisa de vértice 3 de la parábola es el punto medio de las abscisas de los dos puntos en que la parábola corta el eje **x**.



4. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$

Gráfico de la función $y = -x^2 + 2x + 8$.

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN DE ECUACIÓN
$y = -x^2 + 2x + 8$

① Se calcula el vértice

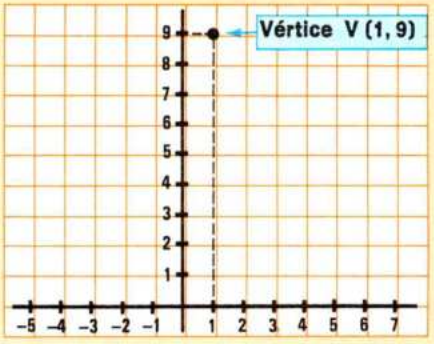


FIGURA 8

② Se hallan los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas

a) **Puntos de corte con el eje x:**

$y = 0 \longrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

b) **Puntos de corte con el eje y:**

$x = 0 \longrightarrow x = 8 \longrightarrow$ **Punto (0, 8)**

③ Se calculan algunos puntos auxiliares

x	0	2	3	−1
y	8	8	5	5

Puntos de corte A(−2, 0), B(4, 0)

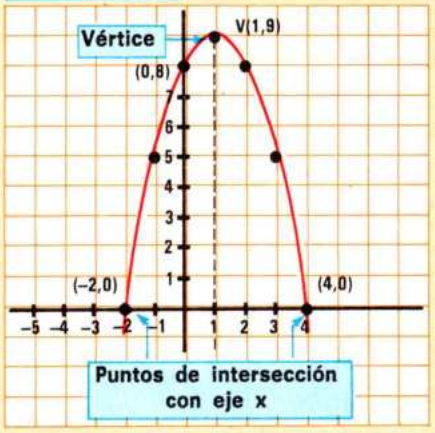


FIGURA 9

Vamos a representar ahora la función polinómica de segundo grado de ecuación $y = -x^2 + 2x + 8$.

① Para calcular el vértice escribimos la función dada en la forma $y = a(x + h)^2 + k$:

$$y = -x^2 + 2x + 8 = -(x^2 - 2x - 8)$$

Como $x^2 - 2x$ recuerda el cuadrado de $x - 1$, escribimos la función de modo que figure en ella este cuadrado:

$$y = -(x^2 - 2x - 8) = -\overbrace{(x^2 - 2x + \underbrace{1}_{-8} - 9)}^{(x-1)^2} =$$

$$= -(x - 1)^2 + 9$$

Así se tiene la función dada escrita en la forma deseada $y = -(x - 1)^2 + 9$, y de aquí resulta el vértice $V(1, 9)$ (figura 8). Además, como $a = -1 < 0$, la parábola está abierta hacia abajo.

② Los puntos de intersección con el eje x (eje de abscisas) se obtienen haciendo $y = 0$ en la función:

$y = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones:

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$$

Los puntos $A(-2, 0)$ y $B(4, 0)$ son los puntos de intersección con el eje x.

Los puntos de intersección con el eje y (eje de ordenadas) se obtienen haciendo $x = 0$ en la función $y = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow y = 8$.

Luego el punto (0, 8) es el punto de intersección con el eje y.

③ Si es necesario, se calculan algunos puntos auxiliares.

El vértice, los puntos de corte con el eje x, el punto de corte con el eje y, junto con los puntos auxiliares, permiten representar la parábola de la figura 9.

Actividades

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa en papel cuadriculado las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2$

b) $y = -2x^2$

c) $y = x^2$

d) $y = -x^2$

e) $y = -4x^2$

f) $y = 3x^2$

Indica primero el vértice de cada una.

2. Escribe el vértice de cada parábola:

a) $y = x^2 + 2$

b) $y = -x^2 + 2$

c) $y = 2x^2 - 2$

d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

f) $y = -3x^2 + 2$

3. Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas de segundo grado.

En cada caso halla:

— Los puntos de intersección de la parábola con los ejes de coordenadas.

— El vértice de cada parábola.

— Tres puntos más de cada parábola.

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = x^2 - 6x + 8$

c) $y = x^2 - 4x + 3$

d) $y = x^2 - 4x - 5$

e) $y = x^2 + 2x - 8$

f) $y = x^2 - 2x - 8$

g) $y = x^2 - 8x$

h) $y = x^2 + 10x$

i) $y = x^2 - 4x$

j) $y = x^2 - 2x$

k) $y = -x^2 + 4x$

l) $y = -x^2 + 6x$

4. Representa gráficamente la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x - 2$.

Sugerencia Poner $y = -(x^2 - 4x) + 2) =$
$= (x^2 - 4x + 4 - 4 + 2) =$
$= -[(x-2)^2 - 2] = -(x-2)^2 + 2.$

• ¿Cuál es el vértice de esta parábola?

5. Halla el vértice y tres puntos más en las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 2$

b) $y = 2x^2 + 4x + 2$

c) $y = -x^2 - 2x + 1$

d) $y = x^2 - 2x + 2$

e) $y = -2x^2 - 4x - 2$

f) $y = -2x^2 - 4x + 2$

6. Escribe el vértice, los puntos de intersección con el eje **x** y el eje de simetría de las siguientes parábolas:

a) $y = \frac{1}{2}x^2$

b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$

d) $y = 2x^2 - 4$

e) $y = -2x^2 + 4$

f) $y = -7x^2 + 14$

g) $y = x^2 - 2x - 3$

h) $y = x^2 - 8x + 12$

i) $y = x^2 + 8x - 9$

7. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas halla:

— El vértice.

— Los puntos de intersección con el eje de abscisas.

— Los puntos de intersección con el eje de ordenadas.

— Los puntos de abscisas 0, 3 y 5 en cada parábola.

a) $y = x^2 - 4x + 4$

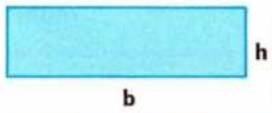
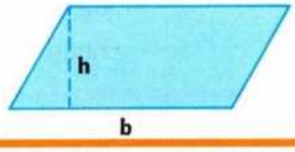
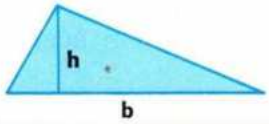
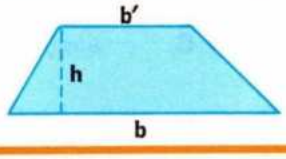
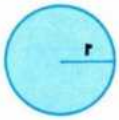
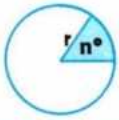
b) $y = x^2 - 8x + 16$

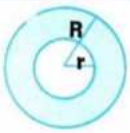
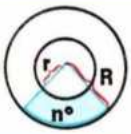
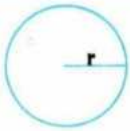
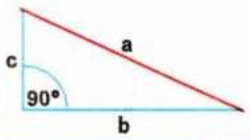
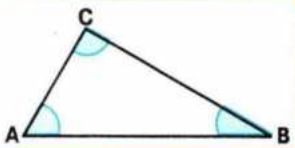
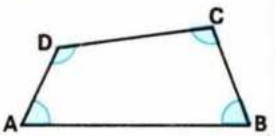
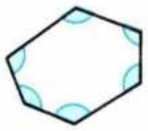
c) $y = x^2 + 4x - 12$

d) $y = x^2 + 2x - 24$

e) $y = -x^2 + 6x - 8$

ALGUNAS FÓRMULAS IMPORTANTES DE LA GEOMETRÍA PLANA

Figuras	Fórmulas
RECTÁNGULO 	$\text{Área} = b \times h$ **b** → base **h** → altura
CUADRADO	$\text{Área} = L \cdot L = L^2$ **L** → lado
ROMBOIDE 	$\text{Área} = b \times h$ **b** → base **h** → altura
TRIÁNGULO 	$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$ **b** → base **h** → altura
ROMBO	$\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2}$ **D** → diagonal mayor **d** → diagonal menor
TRAPECIO 	$\text{Área} = \frac{b + b'}{2} \cdot h$ **b** → base mayor **b′** → base menor **h** → altura
POLÍGONO REGULAR	$\text{Área} = \frac{P \cdot ap}{2}$ **P** → perímetro **ap** → apotema
CÍRCULO 	$\text{Área} = \pi \cdot r^2$ **r** → radio
SECTOR CIRCULAR 	$\text{Área} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n°}{360°}$ **r** → radio **n°** → número de grados

Figuras	Fórmulas
CORONA CIRCULAR 	$\text{Área} = \pi\,(R^2 - r^2)$ **R** → radio mayor **r** → radio menor
TRAPECIO CIRCULAR 	$\text{Área} = \dfrac{\pi\,(R^2 - r^2)\,n°}{360°}$ **R** → radio mayor **r** → radio menor **n°** → número de grados
CIRCUNFERENCIA 	$L = 2 \cdot \pi \cdot r$ **L** → longitud de la circunferencia **r** → radio
ARCO DE n GRADOS **Longitud**	$\text{long ar} = \dfrac{\pi \cdot r \cdot n°}{180°}$ **r** → radio **n°** → número de grados
TRIÁNGULO **Teorema de Pitágoras** 	$a^2 = b^2 + c^2$ **a** → hipotenusa **b** → cateto **c** → cateto
TRIÁNGULO **Suma de los ángulos** 	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ → ángulos del triángulo
CUADRILÁTERO **Suma de los ángulos** 	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$ $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ → ángulos del cuadrilátero
POLÍGONO **Suma de los ángulos** 	$S = 180 \cdot (n - 2)$ **n** → número de lados
POLÍGONO **Número de diagonales**	$\text{Número de diagonales} = \dfrac{n\,(n - 3)}{2}$; **n** → número de lados

MATEMÁTICAS 8

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA

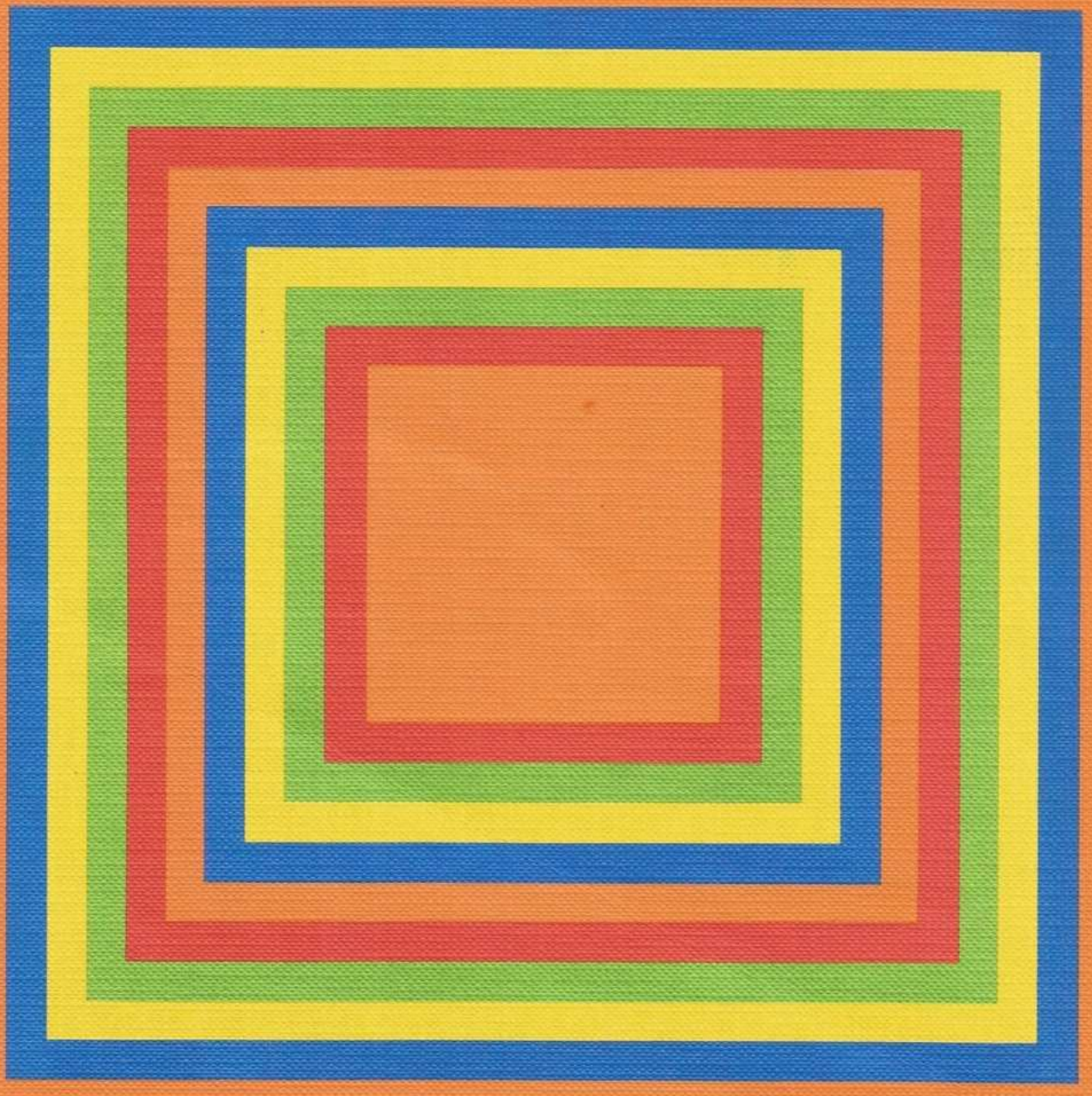
El material didáctico de Educación General Básica ha sido creado en el Departamento de Investigaciones Educativas de Santillana, S. A. bajo la dirección de **Antonio Ramos**

El material de MATEMÁTICAS para el octavo curso ha sido programado y elaborado por el siguiente equipo **José Gil**
Pilar García
Carmen Vázquez
Jaime Mascaró

Dirección editorial **Julián Abad**

Ilustraciones **Rafael Ortega**
José Valera

santillana

Educación Santillana

EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA